

Un modelo fraccionario para el análisis de setas comestibles: Análisis y simulación usando el esquema L1

A fractional model for the analysis of edible mushrooms: Analysis and simulation using the L1 scheme

Adán Jair Serna-Reyes*, Jorge Eduardo Macías-Díaz**✉, Pamela
Romo-Rodríguez***

Serna-Reyes, A. J., Macías-Díaz, J. E., & Romo-Rodríguez, P. (2024). Un modelo fraccionario para el análisis de setas comestibles: Análisis y simulación usando el esquema L1. Investigación y Ciencia de la Universidad Autónoma de Aguascalientes, 32(93), e4984, <https://doi.org/10.33064/iycuaa2024934984>

RESUMEN

En esta investigación se presenta un método numérico de un sistema de ecuaciones diferenciales derivadas de la función logística que modela el crecimiento de poblaciones, particularmente para el crecimiento del área y radio de una especie de hongo, el modelo es una corrección fraccionaria con derivadas temporales de Caputo. El sistema tiene puntos de equilibrio: un nodo atractor y uno repulsor. Con un teorema de punto fijo, se verifica la existencia de soluciones, también se prueba la estabilidad asintótica de las mismas. Numéricamente se utilizan diferencias finitas L1 para aproximar las derivadas fraccionarias, se verifica que el orden de convergencia del método es lineal (en concordancia con el orden de consistencia de las diferencias L1), este método es explícito y converge a la solución del modelo continuo. Finalmente se realizan simulaciones del crecimiento radial y del área con diferentes valores para la derivada fraccionaria que concuerdan con el análisis previo.

Palabras clave: función logística; derivada espacial de Caputo; diferencias L1; estabilidad asintótica; orden de convergencia; teorema de punto fijo.

Recibido: 6 de diciembre de 2023 Aceptado: 13 de septiembre de 2024 Publicado: 30 de septiembre de 2024

*Dirección Académica de Tecnologías de la Información y Mecatrónica, Universidad Tecnológica del Norte de Aguascalientes. Avenida Universidad No. 1001, C. P. 20400, La Estación Rincón, Rincón de Romos, Aguascalientes, México. Correo electrónico: adan.serna@utna.edu.mx ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3569-6207>

**Departamento de Matemáticas y Física, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes. Avenida Universidad No. 940, Ciudad Universitaria, C. P. 20100, Aguascalientes, Ags., México. Correo electrónico: jemacias@correo.uaa.mx ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7580-7533>

***Departamento de Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico de Pabellón de Arteaga, Tecnológico Nacional de México. Carretera a la Estación de Rincón de Romos, Km. 1, C. P. 20670, Pabellón de Arteaga, Aguascalientes, México. Correo electrónico: pamela.rr@pabellon.tecnm.mx ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1812-7491>

✉ Autor para correspondencia

ABSTRACT

In this research, a generalization of Verhulst's equation is proposed, to establish a model of fungus growth, the Caputo time-fractional derivative is used to that end. The main property of the logistics function is an asymptotic equilibrium point, it is verified that this generalization also accomplishes this state. With the help of a fixed-point theorem, it is verified the existence of a solution for the numerical method, which utilizes L1 differences, also it is explicit, and convergent to the solution of the continuous system. Some simulations are presented in order to verify the properties previously proved, such as the order of convergence and graphical simulations.

Keywords: logistic function; Caputo time-fractional derivative; L1 differences; asymptotical stability; order of convergence; fixed point theorem.

INTRODUCCIÓN

La ecuación logística es una de las herramientas principales para el modelado del crecimiento de poblaciones. Surge como una corrección del modelo de Malthus que tiene como resultado un crecimiento exponencial, la corrección tiene forma de coeficiente de inhibición, que se considera proporcional al cuadrado del tamaño de la población; esto quiere decir que las poblaciones a modelar no crecen de forma desenfrenada, sino que por la cantidad limitada de espacio y comida las poblaciones están destinadas a disminuir su ritmo de crecimiento, y eventualmente detenerse en una cantidad predeterminada; esta ecuación fue descrita por primera vez por el matemático Pierre François Verhulst (1838) con una nota sobre la ley de crecimiento de poblaciones. No se habló mucho sobre este resultado hasta su redescubrimiento al final del siglo XX, cuando se observó que la ecuación se puede aplicar en una vasta cantidad de áreas de la investigación, incluyendo auto catálisis químico descubierto y descrito por Ostwald (1883), cinética de Michaelis-Menten (Real, 1977), quimioterapia contra el cáncer (Swan, 1986), etc.

Por otro lado, la generalización de ecuaciones por la vía fraccionaria ha sido muy fructífera a lo largo de los últimos años, pues varias ramas de la ciencia han empleado operadores fraccionarios con el objetivo de mejorar la descripción de fenómenos naturales; en específico, el operador definido por Caputo se ha usado para modelos en los que los efectos de memoria son considerados. Algunos ejemplos de modelos físicos y matemáticos que se encuentran en la literatura son: el control óptimo de algunos sistemas de VIH con memoria en orden fraccionario (Ding, Wang, & Ye, 2011), procesos de difusión a través de la piel (Caputo & Cametti, 2021) y flujo de magnetohidrodinámica en medios porosos sobre un plato movable vertical con memoria térmica (Ali Shah, Ahmed, Elnaqeeb, & Rashidi, 2019), entre muchos otros. También se cuenta con avances con derivadas de Riesz y Caputo como en un modelo de difusión reacción (Macías-Díaz, Serna-Reyes, & Flores-Oropeza, 2024).

El propósito de esta investigación es definir una nueva generalización de un sistema que modela el crecimiento de área y radio de cierto tipo de hongos; específicamente los que se pueden modelar con la ya mencionada función logística, un sistema de ecuaciones diferenciales con la forma de la ecuación de Verhulst; además de probar propiedades del

sistema continuo como puntos de equilibrio. También se pretende proveer de un método numérico que aproxime al sistema continuo, se mostrará que existe una solución para dicho método que coincide con la solución al esquema continuo; además de propiedades típicas del análisis numérico como orden de consistencia y estabilidad; por último, se realizarán simulaciones para verificar que el sistema se comporta de forma adecuada al simular con valores cercanos a la derivada clásica; simulaciones con diferentes valores fraccionarios, acompañados del análisis de convergencia para ambas ecuaciones y, por último, una simulación gráfica del crecimiento radial del hongo en una caja de Petri. La generalización del sistema es un punto de partida para crear nuevos métodos de cultivo para posiblemente optimizar la producción de este hongo en la región.

MATERIALES Y MÉTODOS

La siguiente terminología y notación será usada a lo largo de este documento. Asumamos que $\mathbf{B}_T \subset \mathbb{R}$ denota un conjunto con la forma $[0, T]$, con $T > 0$, que se define como la longitud de periodo temporal. Sean μ_1, μ_2, k_1 y k_2 constantes reales; donde los primeros dos números corresponden al ritmo de crecimiento específico con respecto al área y el diámetro, los dos segundos números al efecto de inhibición respectivamente. Definimos también $A(t)$ y $D(t)$ funciones continuas sobre el dominio \mathbf{B}_T , que representan la función de área y diámetro del experimento. En este trabajo estudiaremos una generalización fraccionaria de un modelo de crecimiento de setas comestibles, el problema de frontera:

$$\begin{aligned} \frac{d^\beta}{dt^\beta} A(t) &= \mu_1 A(t) - k_1 A^2(t), \quad \forall t \in \mathbf{B}_T, \\ \frac{d^\beta}{dt^\beta} D(t) &= \mu_2 D(t) - k_2 D^2(t), \quad \forall t \in \mathbf{B}_T, \\ \text{tal que } \begin{cases} D(0) = D_0, \\ A(0) = A_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Aquí asumimos que $t \in \mathbf{B}_T$, y que $d^\beta A(t)$ representa la generalización fraccionaria en el tiempo de la derivada, llamada derivada de Caputo, definida de la siguiente manera:

Definición 1. (Podlubny, 1998) Sea ϕ una función con dominio \mathbf{B}_T , además sea $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \beta < 1$. Para cada $t \in \mathbf{B}_T$, definimos el operador de derivada fraccionaria de Caputo en el tiempo con orden β de ϕ (si es que existe) como:

$$\frac{\partial^\beta \phi(t)}{\partial t^\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\partial \phi(\eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{(t-\eta)^\beta}.$$

Es importante mencionar que el modelo matemático (1) es una forma general de un sistema de crecimiento poblacional. Formas particulares de esta ecuación diferencial aparecen en modelos de dinámica de crecimiento dependiendo de las especificaciones, su uso va desde la predicción del crecimiento de la población de países como Bélgica (Verhulst, 1838), el peso de ratas de laboratorio, de embriones de rana, la fruta *Cucurbita pepo*, la correlación de crecimiento de varias partes del cuerpo humano (Robertson, 1908), entre otros.

Para encontrar los puntos de estabilidad sólo es necesario igualar a cero cada uno de los elementos del sistema (1), que nos da como resultado:

$$\begin{aligned} 0 &= A(t)(\mu_1 - k_1 A(t)), \\ 0 &= D(t)(\mu_2 - k_2 D(t)), \end{aligned}$$

Luego obtendremos que los puntos de equilibrio del sistema son: $(A_1^*, D_1^*) = (0, 0)$ y $(A_2^*, D_2^*) = (\mu_1/k_1, \mu_2/k_2)$, para mostrar qué tipo de punto de equilibrio tendremos, recurrimos al método de la matriz Jacobiana, que para este sistema es:

$$J(A, D) = \begin{bmatrix} \mu_1 - 2k_1 A & 0 \\ 0 & \mu_2 - 2k_2 D \end{bmatrix}$$

Ahora deberemos obtener los valores propios característicos de los puntos de equilibrio, para determinar su comportamiento, para (A_1^*, D_1^*) :

$$|J(A_1^*, D_1^*) - \lambda I| = \begin{vmatrix} \mu_1 - 2k_1 * 0 - \lambda & 0 \\ 0 & \mu_2 - 2k_2 * 0 - \lambda \end{vmatrix} = (\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)$$

Los valores propios de la matriz son: $\lambda_1 = \mu_1 > 0$ y $\lambda_2 = \mu_2 > 0$, por lo que tendremos dos casos: si $\mu_1 \neq \mu_2$ el punto de equilibrio es un nodo repulsor, todas las trayectorias se alejan de (A_1^*, D_1^*) , mientras que si $\mu_1 = \mu_2$, el punto de equilibrio es un repulsor, las trayectorias se alejan del punto de equilibrio en forma de rayos o curvas, asintóticamente inestable. Para (A_2^*, D_2^*) :

$$|J(A_2^*, D_2^*) - \lambda I| = \begin{vmatrix} \mu_1 - 2k_1 * \frac{\mu_1}{k_1} - \lambda & 0 \\ 0 & \mu_2 - 2k_2 * \frac{\mu_2}{k_2} - \lambda \end{vmatrix} = (-\mu_1 - \lambda)(-\mu_2 - \lambda)$$

Los autovalores de la matriz son: $\lambda_1 = -\mu_1 < 0$ y $\lambda_2 = -\mu_2 < 0$, por lo que también tendremos dos casos: si $\mu_1 \neq \mu_2$ el punto de equilibrio es un nodo atractor, todas las trayectorias se acercan a (A_2^*, D_2^*) , si $\mu_1 = \mu_2$ el punto es un atractor, asintóticamente estable.

Para probar la estabilidad asintótica del sistema y la existencia de soluciones, debemos tomar en consideración los siguientes resultados:

Lema 1. (Estabilidad de sistemas de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias con mismo orden) (Brandibur, Garrappa, & Kaslik, 2021)

En el caso particular de un sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias lineal:

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta} y_1(t) = a_{11}y_1(t) - a_{12}y_2(t)$$

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta} y_2(t) = a_{21}y_1(t) - a_{22}y_2(t)$$

Con $\beta \in (0,1]$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, si $Tr(A) < 2\sqrt{\det(A)} * \cos(\frac{\beta\pi}{2})$, entonces el sistema es asintóticamente estable.

Lema 2. (Existencia y unicidad de una solución) (Ortiz & Hernández, 2013) Sea $\beta \in (0,1)$, $\mathbf{B}_T = (0, T)$, se define $F: \mathbf{B}_T \rightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada, se asume que F satisface la condición de Lipschitz $|F(X_2) - F(X_1)| \leq L|X_2 - X_1|$, existe un único $X(t)$ que satisface el problema de valor inicial (1).

Con el uso de la linealización alrededor del punto de estabilidad (A_2^*, D_2^*) , además del **Lema 1**, se puede verificar la estabilidad asintótica del sistema, pues:

$$Tr(J(A_2^*, D_2^*)) = (-\mu_1 - \mu_2) < 2\sqrt{\mu_1\mu_2} * \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) = 2\sqrt{\det(A)} * \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)$$

Ahora reescribimos el sistema en su forma integral de Volterra, sólo nos enfocaremos en el primer elemento de (1):

$$A(t) = A_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-x)^{\beta-1} F(x, A(x)) dx \quad 0 \leq x \leq T$$

Por medio del **Lema 2** podremos verificar que si la función $F(x, A(x)) = \mu_1 A(x) - k_1 A^2(x)$ es uniformemente Lipschitz continua, entonces (1) tendrá solución única para $A(t)$ y $D(t)$.

Teorema 1. Existe un sistema de soluciones para (1) y cada conjunto de condiciones iniciales.

Para verificar el resultado, basta con notar que la función $F(x, A(x)) = \mu_1 A(x) - k_1 A^2(x)$ está acotada por $A_2^* = \mu_1/k_1$, al ser asintóticamente estable, claramente es continua y sólo debe ser mostrado que la función cumple con la condición de Lipschitz; es decir:

$$|F(A_2) - F(A_1)| = |\mu_1(A_2 - A_1) - k_1(A_2^2 - A_1^2)| \leq (\mu_1 + 2k_1)|A_2 - A_1|$$

por lo que existe una única solución $A(t)$ para cada conjunto de condiciones iniciales, el procedimiento para obtener un único $D(t)$ es similar, así que se omite.

Para aproximar numéricamente la solución del modelo (1) sobre el dominio B_T , seguiremos un enfoque de diferencias finitas, fijando $N \in \mathbb{N}$. Para ello, establezcamos una partición regular del intervalo $[0, T]$, de la forma $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Definiendo así la partición temporal, por $\tau = T/N$.

Por conveniencia, definimos $I_n = \{0, 1, \dots, n\}$ y $\bar{I}_n = I_n \cup \{-1\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En este trabajo usaremos los símbolos a^n y d^n para denotar las aproximaciones a los valores exactos $A(t_n)$ y $D(t_n)$ respectivamente y para cada $n \in \bar{I}_n$. Más aún, definimos el siguiente operador:

Definición 2. (Operador temporal en diferencias L1) (Zhuang & Liu, 2006) Sea $(w^n)_{n \in \bar{I}_N}$ cualquier secuencia finita. Se define el operador discreto

$$\delta_t^\beta w^n = \sum_{m=0}^n b_{n-m}^\beta \frac{w^{m+1} - w^m}{\tau}, \forall n \in \bar{I}_{N-1}$$

con el coeficiente b_n^β definido de la siguiente forma:

$$b_n^\beta = \frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} ((m+1)^{1-\beta} - m^{1-\beta})$$

Los operadores L1 cuentan con la propiedad de aproximar a la derivada fraccionaria de Caputo si la función es suficientemente suave, es decir:

Lema 3. (Orden de consistencia de los operadores L1) (Lin & Xu, 2007) Si se asume que $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{B}_T)$ y $\beta \in (0,1]$, si las derivadas de orden 2 están acotadas en $[0, \infty)$, entonces:

$$\delta_t^\beta \phi(t_n) = \frac{d^\beta}{dt^\beta} \phi(t_n) + \mathcal{O}(\tau^{2-\beta}), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sean A_0 y D_0 condiciones iniciales, y supongamos que $A(t)$ y $D(t)$ son funciones diferenciables. El esquema para aproximar las soluciones del modelo diferencial (1) viene dado por el sistema de ecuaciones discretas

$$\begin{aligned} \delta_t^\beta a^n &= \mu_1 a^n - k_1 (a^n)^2, \forall n \in \bar{I}_{N-1}, \\ \delta_t^\beta d^n &= \mu_2 d^n - k_2 (d^n)^2, \forall n \in \bar{I}_{N-1}, \\ \text{sueto a } &\begin{cases} a^0 = A_0, \\ d^0 = D_0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Este esquema es un modelo discreto explícito. En consecuencia, para resolver el modelo discreto, con $n = 0$ despejamos a^1 y d^1 en las ecuaciones de (2), y usando las condiciones $a^0 = A_0$, $d^0 = D_0$

$$a^1 = A_0 + \frac{\tau}{b_0^\beta} (\mu_1 A_0 - k_1 A_0^2)$$

$$d^1 = D_0 + \frac{\tau}{b_0^\beta} (\mu_2 D_0 - k_2 D_0^2)$$

Para valores de n mayores que 1 usamos la siguiente igualdad para poder despejar los términos a^{n+1} y d^{n+1} .

$$\sum_{m=0}^n b_{n-m}^{\beta} \frac{w^{m+1} - w^m}{\tau} = b_0^{\beta} \frac{w^{n+1} - w^n}{\tau} + \sum_{m=0}^{n-1} b_{n-m}^{\beta} \frac{w^{m+1} - w^m}{\tau}$$

por lo que la forma explícita de las ecuaciones de (2) serán:

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= a^n + \frac{\tau}{b_0^{\beta}} \left(- \sum_{m=0}^{n-1} b_{n-m}^{\beta} \frac{a^{m+1} - a^m}{\tau} + \mu_1 a^n - k_1 (a^n)^2 \right), \quad \forall n \in \bar{I}_{N-1} \\ d^{n+1} &= d^n + \frac{\tau}{b_0^{\beta}} \left(- \sum_{m=0}^{n-1} b_{n-m}^{\beta} \frac{d^{m+1} - d^m}{\tau} + \mu_2 d^n - k_2 (d^n)^2 \right), \quad \forall n \in \bar{I}_{N-1} \end{aligned}$$

RESULTADOS

En todos nuestros ejemplos, tomaremos los siguientes valores fijos: $T = 30$, $\mu_1 = 0.279$ y $k_1 = 0.023$, mientras que $\mu_2 = 0.466$ y $k_2 = 0.006$ obtenidos de la bibliografía (Sarıkaya & Ladisch, 1997) con τ y β siendo las variables principales de nuestros experimentos computacionales, el objetivo es realizar una comparación entre la derivada no fraccionaria y un valor fraccionario cercano; también se pretende analizar el comportamiento asintótico de la función con diferentes valores de β , por último se realizará un análisis de convergencia con respecto a la partición temporal.

Para nuestra primera simulación, se compara la derivada fraccionaria con $\beta = 0.9999$ y $\tau = 0.1$, contando con la solución del sistema no fraccionario:

$$A(t) = \frac{A_0 \mu_1}{A_0 k_1 + (\mu_1 - A_0 k_1 e^{-\mu_1 t})}$$

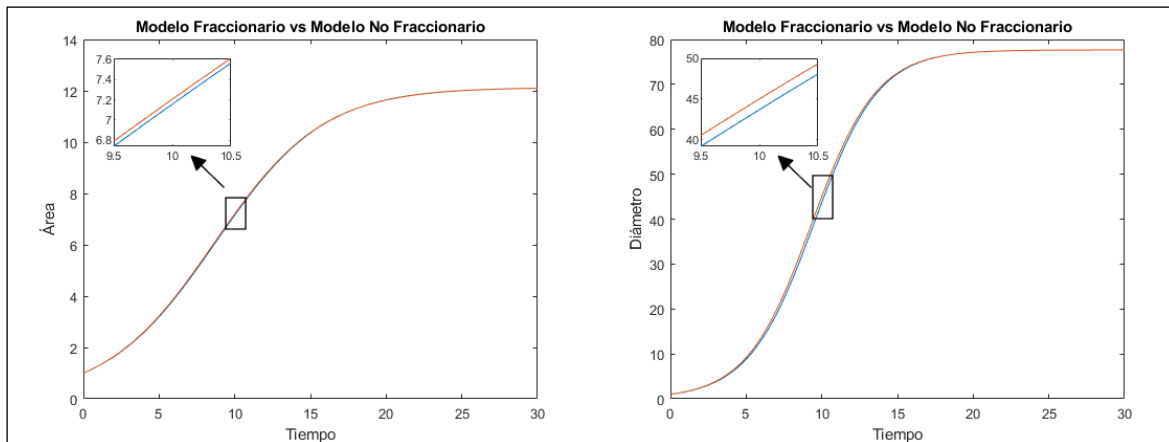


Figura 1. Representación gráfica de la aproximación de la solución a^t vs. la solución real $A(t)$ (izquierda), además de la aproximación de la solución d^t vs. la solución real $D(t)$ (derecha), obtenidas mediante el esquema (2) para las condiciones iniciales $A_0 = D_0 = 1$.
Elaboración propia.

La figura 1 nos muestra la aproximación fraccionaria del modelo (1) para las variables fijas antes mencionadas y condiciones iniciales de área y diámetro de 1, estas gráficas fueron realizadas usando las herramientas Plot y Axes de Matlab y la línea azul representa la aproximación; mientras que la línea anaranjada la solución no fraccionaria; es de esperar que haya un error entre ambas, que se irá reduciendo mientras β tiende a 1.

También se realizaron simulaciones para diferentes valores fraccionarios de β , para ser específicos: $\beta = 0.25$, y $\beta = 0.75$, todos con un valor de $\tau = 0.1$, mostrados en la figura 2; **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, donde se puede observar que mientras la derivada fraccionaria se acerca a cero el crecimiento es más pronunciado; mientras que al usar valores cercanos a uno el crecimiento eventualmente se estabiliza.

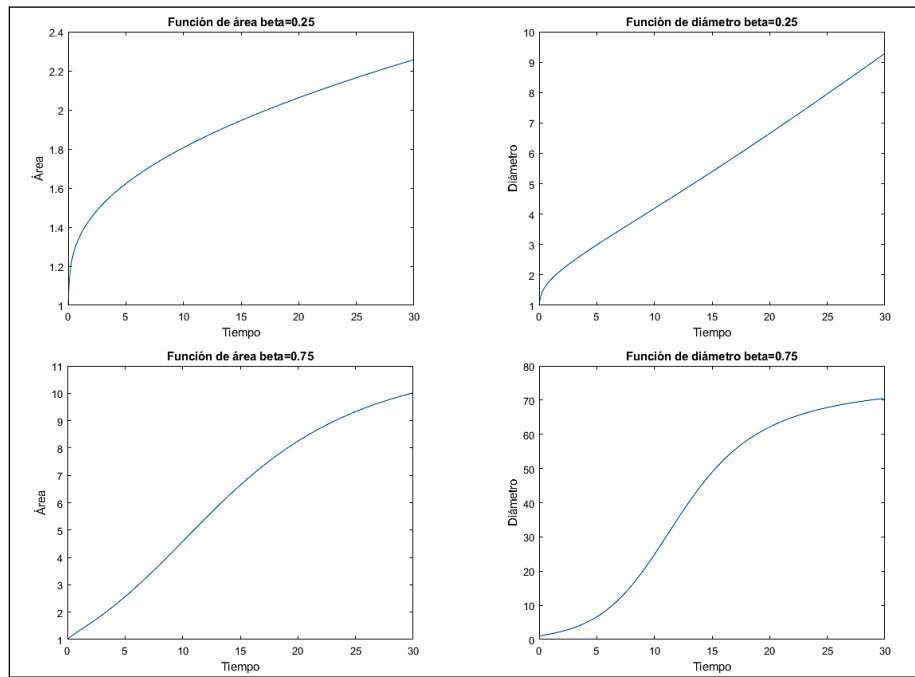


Figura 2. Representación gráfica de la aproximación de la solución a^t con $\beta = 0.25$ (izquierda arriba) y $\beta = 0.75$ (izquierda abajo), además de la aproximación de la solución d^t con $\beta = 0.25$ (derecha arriba) y $\beta = 0.75$ (derecha abajo), obtenidas mediante el esquema (2) para las condiciones iniciales $A_0 = D_0 = 1$. Elaboración propia.

Se realizó un análisis de convergencia temporal con los valores fijados $\beta = 0.25$ y $\beta = 0.75$, tomando en cuenta las soluciones finales a^T y d^T , además de una solución exacta con un valor de τ suficientemente pequeño, para obtener el orden de convergencia se obtuvo el valor absoluto del error y la siguiente función.

$$\rho_\tau = \log_2 \left(\frac{\epsilon_{2\tau}}{\epsilon_\tau} \right)$$

Tabla 1
Análisis de convergencia temporal para la función de área

$\beta = 0.25$			$\beta = 0.75$		
τ	ϵ_T	ρ_T	τ	ϵ_T	ρ_T
0.1	3.43159×10^{-3}	—	0.1	8.30693×10^{-3}	—
0.05	1.70227×10^{-3}	1.0114	0.05	4.24183×10^{-3}	0.9696
0.025	8.37645×10^{-4}	1.0230	0.025	2.13861×10^{-3}	0.9880
0.0125	4.05323×10^{-4}	1.0472	0.0125	1.05564×10^{-3}	1.0185
0.00625	1.89155×10^{-4}	1.0995	0.00625	5.00574×10^{-4}	1.0764
0.003125	8.10678×10^{-5}	1.2223	0.003125	2.17236×10^{-4}	1.2043
0.0015625	2.70229×10^{-5}	1.5849	0.0015625	7.31059×10^{-5}	1.5712

Nota: Elaboración propia.

Tabla 2
Análisis de convergencia temporal para la función de diámetro

$\beta = 0.25$			$\beta = 0.75$		
τ	ϵ_T	ρ_T	τ	ϵ_T	ρ_T
0.1	1.66271×10^{-1}	—	0.1	7.62737×10^{-2}	—
0.05	8.30664×10^{-2}	1.0012	0.05	3.93154×10^{-2}	0.9560
0.025	4.10229×10^{-2}	1.0178	0.025	1.99593×10^{-2}	0.9780
0.0125	1.98872×10^{-2}	1.0445	0.0125	9.90303×10^{-3}	1.0111
0.00625	9.28976×10^{-3}	1.0981	0.00625	4.71406×10^{-3}	1.0708
0.003125	3.98335×10^{-3}	1.2216	0.003125	2.05168×10^{-3}	1.2001
0.0015625	1.32813×10^{-3}	1.5845	0.0015625	6.91907×10^{-4}	1.5681

Nota: Elaboración propia.

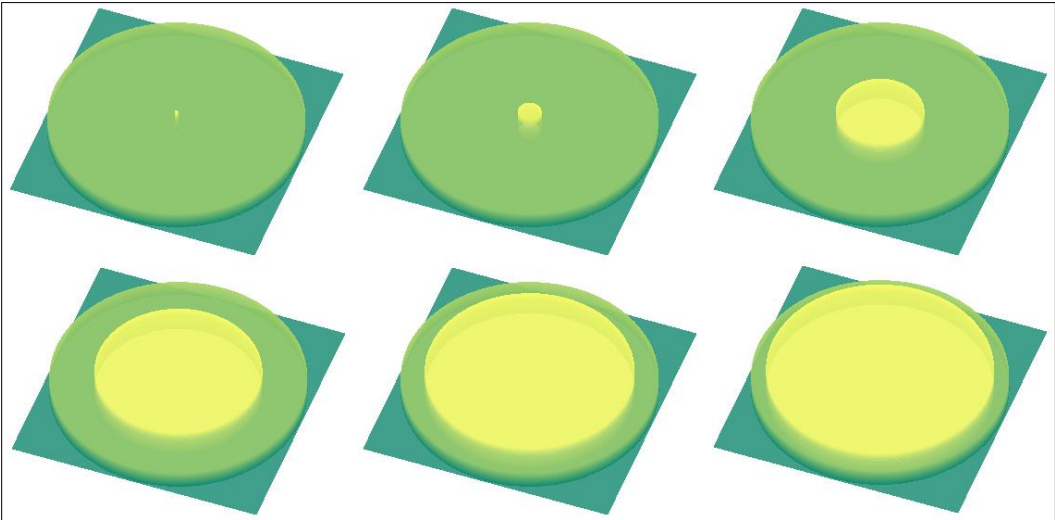


Figura 3. Representación gráfica del crecimiento del hongo en una caja de Petri, con la aproximación de la solución d^t con $\beta = 0.75$, obtenidas mediante el esquema (2) para la condición inicial $D_0 = 1$. Las figuras representan el tiempo $t = 0$ (izquierda arriba), $t = 6$ (centro arriba), $t = 12$ (derecha arriba), $t = 18$ (izquierda abajo), $t = 24$ (centro abajo) y $t = 30$ (derecha abajo).
Elaboración propia.

De las Tabla 1 y Tabla 2 se puede confirmar que el método tiene un orden de convergencia aproximadamente igual a $2 - \beta$, como se predijo analíticamente. De cualquier forma se observa que, en el peor de los casos, se tiene un comportamiento lineal.

Por último, se realizó una simulación gráfica del crecimiento del hongo, para ser preciso del diámetro en comparación del tiempo usando $\beta = 0.75$ y $\tau = 0.1$.

DISCUSIÓN

Del método numérico simulado se verificó que: la derivada fraccionaria de Caputo se comporta de forma similar a la derivada ordinaria al acercarse a valores enteros, que la generalización también cuenta con un nodo repulsor en el origen y un nodo atractor en la razón de la tasa del crecimiento con el efecto de inhibición; además de notar que mientras la derivada fraccionaria toma valores cercanos a cero, la función se demora al ser atraída a su nodo asintóticamente estable, con las tablas de análisis de convergencia se verifica el hecho de que el modelo discreto que se propone es estable cuando el tamaño de paso temporal es suficientemente pequeño; además de verificar el orden de convergencia del operador $L1$, con los resultados se obtiene convergencia lineal. Cabe recalcar que no existe en la bibliografía una generalización del sistema presentado; además de que se utilizaron datos de crecimiento e inhibición de hongos presentes en la literatura para los experimentos computacionales y se realizó una simulación del crecimiento de hongos en una caja de Petri para efectos ilustrativos.

CONCLUSIONES

Se propuso una generalización de un sistema de ecuaciones que modela el crecimiento de poblaciones, en particular el crecimiento de hongos, dicha generalización utiliza derivadas fraccionarias en el tiempo de Caputo, que considera memoria. El sistema se basa en la ecuación de Verhulst y se mostró que el sistema continuo tiene como puntos de estabilidad el origen y la diferencia entre el coeficiente de crecimiento e inhibición, además se demostró que es asintóticamente estable. Por medio de diferencias $L1$ se propuso una discretización explícita para poder aproximar al sistema continuo por medio de una partición temporal. Se presentaron las condiciones para la existencia de una solución, además del orden de consistencia del método, se comprobaron similitudes con el sistema no fraccionario. Se realizaron simulaciones con diferentes valores de la derivada entre cero y uno, también un análisis de convergencia que concuerda con el orden de consistencia de los operadores, finalmente se realizó una simulación gráfica del crecimiento radial de un hongo, tomando en cuenta coeficientes encontrados en la bibliografía, verificando algunas de las propiedades antes descritas, como la estabilidad asintótica de las soluciones y el crecimiento inicial exponencial, seguido del decaimiento del mismo.

Por supuesto que la parte numérica del método puede ser mejorada, por medio de otras técnicas de discretización que podrían mejorar el orden de convergencia del sistema; aunque tal vez se podría comprometer la simplicidad computacional.

Los resultados de esta investigación representan un primer avance para analizar y modelar el crecimiento de hongos, así como otras poblaciones que presentan crecimiento similar a la función logística, que entre otras cosas, permitirán realizar un modelo de negocios para el cultivo y distribución de los mismos, el objetivo es fijar una cota temporal que limite el crecimiento del hongo a las fases de mayor expansión, además se podrían automatizar algunas de las fases del cultivo por medio de tecnología y el modelo recién obtenido.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a los revisores anónimos por sus comentarios y críticas, además A. J. S. R. agradece al Instituto de Ciencia y Tecnología del Estado de Aguascalientes por la obtención de apoyo para la realización de las simulaciones presentadas por medio del Fondo Estatal de Innovación Tecnológica.

REFERENCIAS

- Ali Shah, N., Ahmed, N., Elnaqeeb, T., & Rashidi, M. M. (2019). Magnetohydrodynamic free convection flows with thermal memory over a moving vertical plate in porous medium. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 5(1), 150-161.
- Brandibur, O., Garrappa, R., & Kaslik, E. (2021). Stability of systems of fractional-order differential equations with Caputo derivatives. *Mathematics*, 9(8), 914.
- Caputo, M., & Cametti, C. (2021). Diffusion through skin in the light of a fractional derivative approach: progress and challenges. *Journal of Pharmacokinetics and Pharmacodynamics*, 48(1), 3-19.
- Ding, Y., Wang, Z., & Ye, H. (2011). Optimal control of a fractional-order HIV-immune system with memory. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(3), 763-769.
- Lin, Y., & Xu, C. (2007). Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation. *Journal of Computational Physics*, 225(2), 1533-1552.
- Macías-Díaz, J. E., Serna-Reyes, A. J., & Flores-Oropeza, L. A. (2024). A stable and convergent finite-difference model which conserves the positivity and the dissipativity of Gibbs' free energy for a nonlinear combustion equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 437, 115492.
- Ortiz, J. M., & Hernández, L. R. (2013). The theorem existence and uniqueness of the solution of a fractional differential equation. *Acta Universitaria*, 23, 16-18.
- Ostwald, W. (1883). Studien zur chemischen Dynamik. *Journal fuer Praktische Chemie*, 136 (n.s. 27, 28), 1-39, 449-495.
- Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.
- Real, L. A. (1977). The Kinetics of Functional Response. *The American Naturalist*, 111(978), 289-300.
- Robertson, T. B. (1908). On the normal rate of growth of an individual, and its biochemical significance. *Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen*, 25(4), 581-614.
- Sarikaya, A., & Ladisch, M. R. (1997). An unstructured mathematical model for growth of *Pleurotus ostreatus* on lignocellulosic material in solid-state fermentation systems. *Applied Biochemistry and Biotechnology*, 62, 71-85.

- Swan, G. W. (1986). Cancer chemotherapy: Optimal control using the Verhulst-Pearl equation. *Bulletin of Mathematical Biology*, 48, 381-404.
- Verhulst, P.F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondence Mathématique et Physique (Ghent)*, 10, 113-121.
- Zhuang, P., & Liu, F. (2006). Implicit difference approximation for the time fractional diffusion equation. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 22, 87-99.



Esta obra está bajo una licencia internacional [Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Usted es libre de Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

Adaptar — remezclar, transformar y construir a partir del material

La licenciente no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

Atribución — Usted debe dar crédito de manera adecuada, brindar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciente.

NoComercial — Usted no puede hacer uso del material con propósitos comerciales.

CompartirIgual — Si remezcla, transforma o crea a partir del material, debe distribuir su contribución bajo la misma licencia del original.