

Un esquema para una solución radialmente simétrica de la ecuación del bosón de Higgs en el espacio de De Sitter

A scheme for solutions of Higgs' boson equation in the De Sitter universe with radial symmetry

Luis Fernando Muñoz-Pérez*✉, Jorge Eduardo Macías-Díaz*, José Antonio Guerrero-Díaz de León**, Ángel Eduardo Muñoz-Zavala**

Muñoz-Pérez, L. F., Macías-Díaz, J. E., Guerrero-Díaz de León, J. A., & Muñoz-Zavala, A. E. (2022). Un esquema para una solución radialmente simétrica de la ecuación del bosón de Higgs en el espacio de De Sitter. *Investigación y Ciencia de la Universidad Autónoma de Aguascalientes*, 30(87), e3742, doi: <https://doi.org/10.33064/iycuaa2022873742>

RESUMEN

En este trabajo presentamos un esquema numérico de la ecuación del bosón de Higgs en el espacio de De Sitter. Una de sus principales características es su forma variacional, lo cual se traduce en la modelación de la energía asociada al caso continuo. La ecuación mostrada en este trabajo es una generalización que contempla un potencial y un coeficiente de difusión dependiente del tiempo. El esquema propuesto es un método implícito consistente, estable y convergente al sistema continuo. Los resultados de dicho esquema son mostrados y discutidos para mostrar su eficiencia y severidad, todo de acuerdo con los resultados teóricos.

Palabras clave: bosón de Higgs; espacio de De Sitter; radialmente simétrico; estabilidad; convergencia; esquema de diferencias finitas.

ABSTRACT

In this work, we present a numerical scheme of the Higgs Boson equation in De Sitter space. One of its main characteristics is its variational form, which translates into the modeling of the energy associated with the continuous case. The equation shown in this work is a generalization that contemplates a potential and a time-dependent diffusion coefficient.

Recibido: 3 de junio de 2022, **Aceptado:** 29 de julio de 2022

*Departamento de Matemáticas y Física, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes. Av. Universidad # 940, Ciudad Universitaria, C. P. 20100, Aguascalientes, Ags., México. Correo electrónico: lfperez@correo.uaa.mx; jemacias@correo.uaa.mx ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3968-2964>; <https://orcid.org/0000-0002-7580-7533>

**Departamento de Estadística, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes. Av. Universidad # 940, Ciudad Universitaria, C. P. 20100, Aguascalientes, Ags., México. Correo electrónico: jaguerrero@correo.uaa.mx; aemz@correo.uaa.mx ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1804-279X>; <https://orcid.org/0000-0002-7484-2097>

✉ Autor para correspondencia

The proposed scheme is an implicit, consistent, stable and convergent method to the continuous system. The results of this scheme are shown and discussed to show its efficiency and severity, all following the theoretical results.

Keywords: Higgs boson; De Sitter space; radially symmetric; stability; convergence; finite difference scheme.

INTRODUCCIÓN

La ecuación del bosón de Higgs es un sistema fundamental en la unificación de varias teorías en física. De hecho, la ecuación del bosón de Higgs en el espacio-tiempo de Minkowski y de De Sitter se emplea para unificar las teorías sobre interacciones débiles, fuertes y electromagnéticas según Weinberg (1995). Desde la publicación en el informe de ATLAS Collaboration y Aad et al. (2012) se confirma experimentalmente la existencia del bosón de Higgs, este modelo ha sido estudiado extensamente principalmente desde el punto de vista físico. De hecho, hay muchos estudios físicos que se centran en la investigación fenomenológica del bosón de Higgs; tal es el caso de Carena y Haber (2003) y Ellis, Gaillard y Nanopoulos (1991).

Por otro lado, Bezrukov y Shaposhnikov (2008) realizan avances teóricos referentes al modelo estándar de física de partículas. Además, la investigación de la masa de esta partícula también es un tema activo de investigación, como lo demuestran The CMS Collaboration y Sirunyan et al. (2020) en su trabajo sobre la medición de la masa del bosón de Higgs en el canal de desintegración del difotón, la conciliación de la teoría del campo efectivo y el híbrido.

Desde el punto de vista matemático, la investigación de la ecuación del bosón de Higgs en el espacio-tiempo de Minkowski y de De Sitter ha demostrado ser una tarea difícil. Hay algunos trabajos recientes que investigan el comportamiento de las soluciones globales de estos modelos desde un punto de vista riguroso, uno de ellos es Yagdjian (2012), que proporciona condiciones suficientes para la existencia de ceros de soluciones globales. Además, algunas condiciones para que las soluciones globales sean oscilatorias en el tiempo han sido completamente probadas. Sin embargo, hasta donde se sabe, la prueba de la existencia de soluciones globales para este modelo sigue siendo un problema abierto de investigación en la actualidad.

En vista de la falta de un aparato matemáticamente riguroso para dilucidar la existencia de soluciones globales en el tiempo de la ecuación del bosón de Higgs en el espacio-tiempo de De Sitter, algunos informes han dirigido la atención a la investigación numérica de este modelo (Balogh, Banda, & Yagdjian, 2019; Tsuchiya & Nakamura, 2019). Sin embargo, vale la pena señalar que la mayoría de esos informes emplean discretizaciones de primer orden que se aproximan a ecuaciones diferenciales parciales, como los métodos comerciales de Runge-Kutta. Motivados por estas limitaciones los autores del presente trabajo han dedicado algunos esfuerzos a proponer y analizar una discretización de la ecuación del bosón de Higgs en el espacio-tiempo de De Sitter que sean capaces de asemejarse a la estructura hamiltoniana del problema.

Algunos informes ya están disponibles en la literatura para resolver la ecuación del bosón de Higgs en el espacio-tiempo de De Sitter usando discretizaciones hamiltonianas (Muñoz-Pérez & Macías-Díaz, 2020; Muñoz-Pérez, Macías-Díaz, & Guerrero, 2020). En el presente trabajo se propuso y analizó teóricamente un esquema hamiltoniano de diferencias finitas para resolver nuestro modelo matemático en el caso tridimensional. Se limitó la atención a la aproximación de soluciones radialmente simétricas, por lo que una simplificación conveniente del modelo matemático estuvo a la mano. Una ventaja obvia de estudiar soluciones radiales fue que un sistema 1 + 1 - dimensional reducido dio como resultado (Strauss & Vazquez, 1978), aunque las soluciones son obviamente válidas para el caso tridimensional. Se proporcionaron algunas simulaciones numéricas para mostrar la capacidad del esquema para aproximar las soluciones radialmente simétricas de la ecuación del bosón de Higgs en el espacio-tiempo de De Sitter, y la presencia de soluciones similares a burbujas se mostró en ese contexto. La ventaja de nuestro enfoque es, obviamente, la simplicidad de la discretización. Además, el esquema numérico propuesto en el presente trabajo tiene una solución única, preserva la disipación de la energía; además, es numéricamente consistente, estable y convergente.

MATERIALES Y MÉTODOS

Para el resto de este trabajo consideramos un dominio espacial abierto y acotado $D \subset \mathbb{R}^3$, y un intervalo temporal $[0, T]$, para algún $T > 0$. Definimos el dominio del espacio-tiempo $\Omega = D \times (0, T)$, y usamos \bar{D} y $\bar{\Omega}$ para denotar, respectivamente, la cerradura de D y Ω en la topología estándar de \mathbb{R}^4 . Sean $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ y $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, y supongamos que $\phi_0, \phi_1: D \rightarrow \mathbb{R}$ son continuamente diferenciables. Para el trabajo actual tomaremos como punto de partida una generalización de la ecuación del bosón de Higgs en el espacio de De Sitter

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, t) - f(t)\Delta\phi(x, t) + 3\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) + F'(\phi(x, t)) = 0, \quad \forall(x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

Las soluciones en forma de burbuja de la ecuación del bosón de Higgs son funciones radialmente simétricas. Físicamente este hecho se justifica en parte por el principio cosmológico, que supone que el Universo es homogéneo e isotrópico a gran escala. Supondremos que D es la esfera abierta en \mathbb{R}^3 tomando al origen como el centro y un radio igual a $L > 0$.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - f(t)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + 3\frac{\partial \phi}{\partial t} + F'(\phi) = 0, \quad \forall(r, t) \in (0, L) \times (0, T). \quad (2)$$

Consideremos la transformación $\psi(r, t) = r\phi(r, t)$. Es evidente que $\psi(0, t) = 0$, para cada $t \in [0, T]$. Además, las siguientes identidades se cumplen trivialmente, para cada $0 < r < L$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}.$$

Como consecuencia,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(r, t) - f(t) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}(r, t) + 3 \frac{\partial \psi}{\partial t}(r, t) + rF'(\psi(r, t)/r) = 0, \quad \forall (r, t) \in (0, L) \times [0, T], \quad (3)$$

$$\text{S.A. } \begin{cases} \psi(r, 0) = r\phi_0(r), & \forall r \in (0, L), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(r, 0) = r\phi_1(r), & \forall r \in (0, L), \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, & \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

A su vez, la expresión de la energía total para el sistema (3) en términos de la nueva función escalar ψ viene dada por el siguiente resultado:

Teorema 1. Si ϕ es una solución radialmente simétrica y $\psi(r, t) = r\phi(r, t)$, para cada $(r, t) \in \bar{\Omega}$, entonces la energía total del sistema en el momento $t \in [0, T]$ está dada por

$$E(t) = 4\pi e^{3t} \int_0^L \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} \psi(r, t) + \frac{f(t)}{2} \left(\frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} \right)^2 + r^2 F \left(\frac{\psi(r, t)}{r} \right) \right] dr. \quad (4)$$

A la luz de este teorema, la densidad de energía del modelo (3) en el punto (r, t) es

$$H(r, t) = 4\pi e^{3t} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} \right]^2 + \frac{3}{2} \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} \psi(r, t) + \frac{f(t)}{2} \left[\frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} \right]^2 + r^2 F \left(\frac{\psi(r, t)}{r} \right) \right\} \quad (5)$$

Finalmente, para obtener la expresión para la derivada de la energía del sistema (3) en el tiempo t derivamos respecto al tiempo la ecuación (4). Estableciendo que

$$E'(t) = 4\pi e^{3t} \int_0^L \left[\frac{f'(t)}{2} \left(\frac{\partial \psi(r,t)}{\partial r} \right)^2 - \frac{3}{2} r F' \left(\frac{\psi(r,t)}{r} \right) \psi(r,t) + 3r^2 F \left(\frac{\psi(r,t)}{r} \right) \right] dr. \quad (6)$$

Para aproximar numéricamente la solución del modelo (3) sobre el dominio del espacio-tiempo $\bar{\Omega}$, seguiremos un enfoque de diferencias finitas y para $M, N \in \mathbb{N}$. Para ello, establezcamos una partición regular del intervalo $[0, L]$, de la forma $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_M = L$, y de $[0, T]$ de la forma $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Definiendo así la partición espacial y temporal, por $h = L/M$ y $\tau = T/N$, respectivamente. Por conveniencia, definimos $I_n = \{0, 1, \dots, n\}$ y $\bar{I}_n = I_n \cup \{-1\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En este trabajo, usamos el símbolo \mathcal{V}_h para denotar el espacio vectorial real de todas las funciones reales definidas en la malla $\{r_j; j \in \bar{I}_M\}$. Para el resto de este manuscrito y a menos que digamos lo contrario, la aproximación numérica del valor $\psi_j^n = \psi(r_j, t_n)$ se denotará por Ψ_j^n , por cada $(j, n) \in I_M \times I_N$. Además, sea $\Psi^n = (\Psi_j^n)_{j \in \bar{I}_M} \in \mathcal{V}_h$, para cada $n \in \bar{I}_N$.

Definición 1. Si Φ y Ψ son funciones cualesquiera en \mathcal{V}_h , entonces definimos por componentes la suma, la diferencia, la multiplicación y la división (siempre que tenga sentido) de Φ y Ψ . Más concretamente, si $*$ representa cualquiera de esas operaciones, definimos $(\Phi * \Psi)_j = \Phi_j * \Psi_j$, para cada $j \in \bar{I}_M$. Además, si $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función y $\Psi \in \mathcal{V}_h$, entonces también definimos la composición $G \circ \Psi$, lo que significa que $(G \circ \Psi)_j = G(\Psi_j)$, para cada $j \in \bar{I}_M$.

Definición 2 (Operadores temporales discretos). Sea $(\Psi^n)_{n \in \bar{I}_N}$ cualquier secuencia finita en \mathcal{V}_h . Se definen los operadores discretos

$$\begin{aligned} \delta_t \Psi_j^n &= \frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^n}{\tau}, \forall (j, n) \in \bar{I}_M \times \bar{I}_{N-1} \\ \delta_t^{(1)} \Psi_j^n &= \frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^{n-1}}{\tau}, \forall (j, n) \in \bar{I}_M \times \bar{I}_{N-1} \\ \delta_t^2 \Psi_j^n &= \frac{\Psi_j^{n+1} - 2\Psi_j^n + \Psi_j^{n-1}}{\tau}, \forall (j, n) \in \bar{I}_M \times \bar{I}_{N-1} \end{aligned}$$

Además, si $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $(j, n) \in I_M \times I_{N-1}$, entonces definimos

$$\delta_{\Psi, t}^{(1)} F(\Psi_j^n) = \begin{cases} \frac{F(\Psi_j^{n+1}) - F(\Psi_j^{n-1})}{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^{n-1}}, & \text{if } \Psi_j^{n+1} \neq \Psi_j^{n-1}, \\ F'(\Psi_j^n), & \text{Otro caso.} \end{cases}$$

Definición 3. Sea $p \in [1, \infty)$. Definimos el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{V}_h \times \mathcal{V}_h \rightarrow \mathbb{R}$ y la norma $\|\cdot\|_p: \mathcal{V}_h \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente, por

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = h \sum_{j \in I_{M-1}} \Phi_j \Psi_j, \forall \Phi, \Psi \in \mathcal{V}_h, \quad \|\Phi\|_p = \left[h \sum_{j \in I_{M-1}} |\Phi_j|^p \right]^{1/p}, \forall \Phi \in \mathcal{V}_h.$$

Lema 1. Si $\Phi, \Psi \in \mathcal{V}_h$, entonces $\langle -\delta_r^2 \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, -\delta_r^2 \Psi \rangle = \langle \delta_r \Phi, \delta_r \Psi \rangle$. Además $\|\delta_r \Phi\|_2^2 \leq 4h^{-1} \|\Phi\|_2^2, \forall \Phi \in \mathcal{V}_h$.

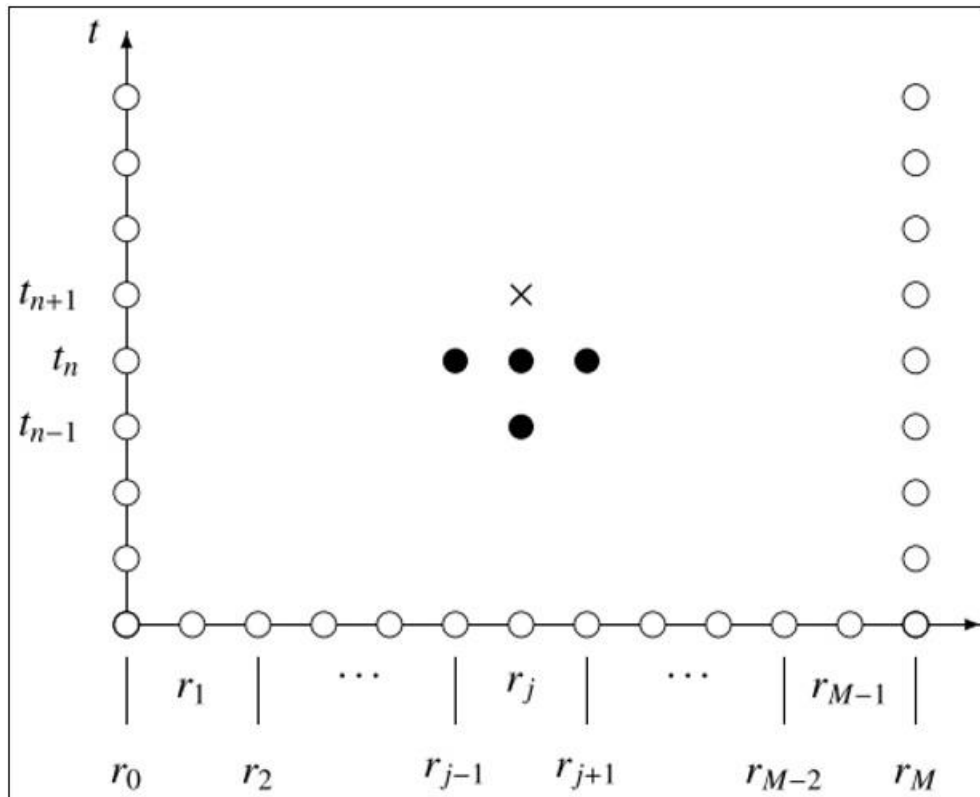


Figura 1. Plantilla de diferencias directas para la aproximación a la solución exacta del modelo matemático (3) en el tiempo t_n , usando el esquema de diferencias finitas (7). Los círculos negros representan las aproximaciones conocidas en los tiempos t_{n-1} y t_n , mientras que la cruz denota la aproximación desconocida en el tiempo t_{n+1} .
Elaboración propia.

Sean ϕ_0 y ϕ_1 condiciones iniciales suaves, y supongamos que f y F son funciones diferenciables. El esquema para aproximar las soluciones del modelo diferencial (3) viene dado por el sistema de ecuaciones discretas

$$\delta_t^{(2)}\Psi_j^n - f(t_n)\delta_r^{(2)}\Psi_j^n + 3\delta_t^{(1)}\Psi_j^n + r_j\delta_{\Psi,t}^{(1)}F(\Psi_j^n/r_j) = 0, \forall (j, n) \in I_{M-1} \times \bar{I}_{N-1}, \quad (7)$$

$$\text{sujeeto a } \begin{cases} \Psi_j^0 = r_j\phi_0(x_j), & \forall j \in I_{M-1}, \\ \delta_t^{(1)}\Psi_j^0 = r_j\phi_1(x_j), & \forall j \in I_{M-1}, \\ \Psi_0^n = \Psi_M^n = 0, & \forall n \in I_{N-1}. \end{cases}$$

Este esquema es un modelo discreto implícito de tres pasos. En consecuencia, para resolver el modelo discreto (7), utilizamos el método de Newton-Raphson para sistemas no lineales de ecuaciones algebraicas.

Por otro lado, tomando $n = 0$ en la ecuación (7), y usando la condición $\delta_t^{(1)}\Psi_j^0 = r_j\phi_1(x_j)$,

$$\Psi_j^1 = r_j\phi_0(x_j) + \tau r_j\phi_1(x_j) + \frac{\tau^2}{2}f(t_0)\delta_r^{(2)}(r_j\phi_0(x_j)) - \frac{3}{2}\tau^2 r_j\phi_1(x_j)$$

$$- \tau r_j \frac{F\left(\frac{\Psi_j^1}{r_j}\right) - F\left(\frac{\Psi_j^1}{r_j} - 2\tau\phi_1(x_j)\right)}{4\phi_1(x_j)}$$

para todo $j \in I_{M-1}$. Las aproximaciones ficticias en el tiempo t_{-1} no son empleadas en la implementación computacional del método numérico. En la figura 1 se puede observar el esquema del método implícito (7).

RESULTADOS

El primer paso es probar la existencia de soluciones del esquema de diferencias finitas (7). Para ello, sea $\Phi \in \mathcal{V}_h$, y suponga que $(\Psi^n)_{n \in \bar{I}_N}$ es una secuencia finita en \mathcal{V}_h .

Teorema 2 (Existencia de soluciones). Supongamos que existe $K_1 \geq 0$ tal que $f(t) \leq K_1$, para todo $t \in [0, T]$. Si $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$, entonces el esquema de diferencias finitas (7) se puede resolver para cualquier conjunto de condiciones iniciales.

Definamos la aproximación del hamiltoniano (5) en el punto (x_j, t_n) por

$$H_j^n = 4\pi e^{3t_n} \left[\frac{1}{2}(\delta_t \Psi_j^n)^2 + \frac{3}{2}(\delta_t \Psi_j^n)\mu_t \Psi_j^n + \frac{1}{2}(\mu_t f(t_n))(\delta_r \Psi_j^{n+1})(\delta_r \Psi_j^n) + r_j^2 \mu_t F(\Psi_j^n/r_j) \right].$$

Además, la energía total discreta en el tiempo t_n se define como

$$E^n = 4\pi e^{3t_n} \left[\frac{1}{2} \|\delta_t \Psi^n\|_2^2 + \frac{3}{2} \langle \delta_t \Psi^n, \mu_t \Psi^n \rangle + \frac{1}{2} (\mu_t f(t_n)) \langle \delta_r \Psi^{n+1}, \delta_r \Psi^n \rangle + \langle \mu_t F(\Psi^n/r), r^2 \rangle \right].$$

Requeriremos el siguiente resultado técnico para calcular la tasa discreta de cambio de la energía total del sistema de diferencia finita.

Lema 2. Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no negativo, y sea una secuencia en \mathcal{V}_h . Entonces

- a) $\langle \delta_t^{(2)} \Psi^n, \delta_t^{(1)} \Psi^n \rangle = \frac{1}{2} \delta_t \|\delta_t \Psi^{n-1}\|_2^2$, para cada $n \in \bar{I}_{N-1}$.
- b) $\delta_t \langle \delta_t \Psi^{n-1}, \mu_t \Psi^{n-1} \rangle = \langle \delta_t \Psi^{n-1}, \delta_t^{(1)} \Psi^n \rangle + \langle \delta_t^{(2)} \Psi^n, \mu_t \Psi^n \rangle$, para cada $n \in \bar{I}_{N-1}$.
- c) $\langle r \delta_{\Psi, t}^{(1)} F(\Psi^n/r), \delta_t^{(1)} \Psi^n \rangle = \delta_t \langle r^2, \mu_t F(\Psi^{n-1}/r) \rangle$, para cada $n \in \bar{I}_{N-1}$.
- d) $\langle -\delta_r^{(2)} \Psi^n, \delta_t^{(1)} \Psi^n \rangle = \frac{1}{2} \delta_t \langle \delta_r \Psi^n, \delta_r \Psi^{n-1} \rangle$, para cada $n \in \bar{I}_{N-1}$.
- e) $\langle \delta_r \Psi^{n+1}, \delta_r \Psi^n \rangle = \mu_t \left\| \delta_r \Psi^n \right\|_2^2 - \frac{1}{2} \tau^2 \left\| \delta_{rt} \Psi^n \right\|_2^2$, para cada $n \in \bar{I}_{N-1}$.

Lema 3 (Regla del producto). Supongamos que $(\Phi^n)_{n \in \bar{I}_n}$ y $(\Psi^n)_{n \in \bar{I}_n}$ son cualquier secuencia finita en \mathcal{V}_h . Si $(j, n) \in I_{M-1} \times \bar{I}_{N-1}$, entonces $\delta_t(\Psi_j^n \Phi_j^n) = \Psi_j^n \delta_t \Phi_j^n + \Phi_j^{n+1} \delta_t \Psi_j^n$.

Lema 4. Sea $(\Psi^n)_{n \in \bar{I}_n}$ una secuencia finita en \mathcal{V}_h , entonces se satisfacen las siguientes identidades para cada $n \in I_{N-2}$ una:

- a) $\delta_t [e^{3t_n} \|\delta_t \Psi^n\|_2^2] = (\delta_t e^{3t_n}) \|\delta_t \Psi^{n+1}\|_2^2 + 2e^{3t_n} \langle \delta_t^{(2)} \Psi^{n+1}, \delta_t^{(1)} \Psi^{n+1} \rangle$,
- b) $\delta_t [e^{3t_n} \langle \mu_t F(\Psi^n/r), r^2 \rangle] = (\delta_t e^{3t_n}) \langle \mu_t F(\Psi^{n+1}/r), r^2 \rangle + e^{3t_n} \langle r \delta_{\Psi, t} F(\Psi^{n+1}/r), \delta_t^{(1)} \Psi^{n+1} \rangle$,
- c) $\delta_t [e^{3t_n} \langle \delta_t \Psi^n, \mu_t \Psi^n \rangle] = \delta_t e^{3t_n} \langle \delta_t \Psi^{n+1}, \mu_t \Psi^{n+1} \rangle + e^{3t_n} \langle \delta_t^{(2)} \Psi^{n+1}, \mu_t \Psi^{n+1} \rangle + e^{3t_n} \langle \delta_t \Psi^n, \delta_t^{(1)} \Psi^{n+1} \rangle$, y
- d) $\delta_t [e^{3t_n} (\mu_t f(t_n)) \langle \delta_r \Psi^{n+1}, \delta_r \Psi^n \rangle] = (\delta_t e^{3t_n}) (\mu_t f(t_{n+1})) \langle \delta_r \Psi^{n+1}, \delta_r \Psi^n \rangle$

$$e) +e^{3t_n} \left(\delta_t^{(1)} f(t_{n+1}) \right) \langle \delta_r \Psi^{n+1}, \delta_r \Psi^n \rangle - 2e^{3t_{n+1}} (\mu_t f(t_{n+1})) \left\langle \delta_r^{(2)} \Psi^{n+1}, \delta_t^{(1)} \Psi^{n+1} \right\rangle$$

Teorema 3 (Disipación de energía). Si Ψ es una solución de (7) y $n \in \bar{I}_{N-2}$, entonces

$$\begin{aligned} \delta_t E^n = 4\pi \left[\frac{1}{2} (\delta_t e^{3t_n}) \|\delta_t \Psi^{n+1}\|_2^2 + e^{3t_n} \langle \delta_t^{(2)} \Psi^{n+1}, \delta_t^{(1)} \Psi^{n+1} \rangle + \frac{3}{2} (\delta_t e^{3t_n}) \langle \delta_t \Psi^{n+1}, \mu_t \Psi^{n+1} \rangle \right. \\ \left. + \frac{3}{2} e^{3t_n} \langle \delta_t^{(2)} \Psi^{n+1}, \mu_t \Psi^{n+1} \rangle + \frac{3}{2} e^{3t_n} \langle \delta_t \Psi^n, \delta_t^{(1)} \Psi^{n+1} \rangle \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\delta_t e^{3t_n}) (\mu_t f(t_{n+1})) \langle \delta_r \Psi^{n+1}, \delta_r \Psi^n \rangle + \frac{1}{2} e^{3t_n} (\delta_t^{(1)} f(t_{n+1})) \langle \delta_r \Psi^{n+1}, \delta_r \Psi^n \rangle \right. \\ \left. - e^{3t_{n+1}} (\mu_t f(t_{n+1})) \left\langle \delta_r^{(2)} \Psi^{n+1}, \delta_t^{(1)} \Psi^{n+1} \right\rangle + (\delta_t e^{3t_n}) \langle \mu_t F(\Psi^{n+1}/r), r^2 \rangle \right. \\ \left. + e^{3t_n} \langle r \delta_{\Psi,t} F(\Psi^{n+1}/r), \delta_t^{(1)} \Psi^{n+1} \rangle \right]. \end{aligned}$$

Para el resto de esta sección dejaremos que $D \subseteq \mathbb{R}^3$ sea la bola abierta con centro en el origen y radio $L > 0$, y consideraremos el siguiente problema con valores en la frontera inicial, regido por la ecuación tridimensional del bosón de Higgs en el espacio-tiempo de De Sitter

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - e^{-2t} \Delta \phi(x, t) + 3 \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} - \mu^2 \phi(x, t) + \lambda |\phi(x, t)|^{q-1} \phi(x, t) = 0, \quad (8) \\ \text{S.A. } \begin{cases} \phi(x, 0) = \phi_0(x), & \forall x \in B, \\ \frac{\partial \phi(x, 0)}{\partial t} = \phi_1(x), & \forall x \in B, \\ \phi(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \partial B \times [0, T], \end{cases} \end{aligned}$$

para cada $(x, t) \in B \times \bar{R}^+$. Es fácil comprobar que este modelo es una forma particular de (2). Además, centraremos nuestra atención en las soluciones radialmente simétricas de (8); es decir, $\phi(x, t) = \phi(r, t)$. Además, consideraremos la transformación $\psi(r, t) = r\phi(r, t)$, para $(r, t) \in [0, L] \times [0, T]$. Como vimos anteriormente, ϕ satisface (8) si y solo si ψ satisface (3).

Definición 4. Para cada $R > 0$ y $r_0 \in R$, definimos la función $B(\cdot; r_0, R): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$B(r; r_0, R) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2 - |r - r_0|^2}\right), & \text{if } |r - r_0| < R, \\ 0, & \text{if } |r - r_0| \geq R. \end{cases}$$

En todos nuestros ejemplos, tomaremos $\tau = h = 0.002$, estableceremos $L = 1$ y dejaremos que D sea la bola unitaria en \mathbb{R}^3 . Además, emplearemos los parámetros del modelo $\lambda = 2$ y $\mu = 3$. Se considerarán diferentes condiciones iniciales para el problema del valor límite inicial (8).

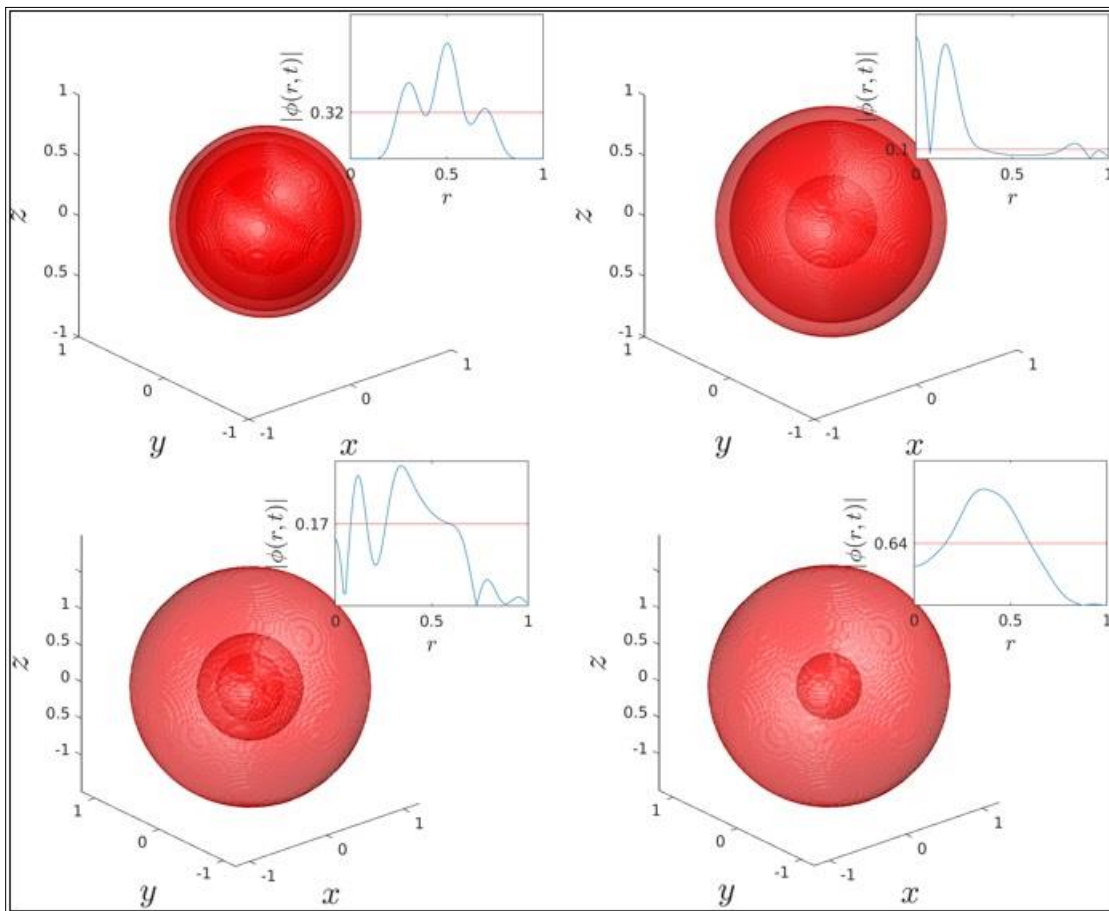


Figura 2. Representación gráfica de la aproximación de la solución $\psi(x, t)$, para cada $x \in D$ del primer problema para los tiempos $t = 0.100$ (superior izquierda), $t = 0.600$ (superior derecha), $t = 1.000$ (inferior izquierda) y $t = 2.00$ (inferior derecha), obtenidas mediante el esquema (8) para las condiciones iniciales $\phi_0(r) = B(r; 0.4, 0.3) + B(r; 0.6, 0.3)$ y $\phi_1(r) = 0$. Las representaciones tridimensionales la solución $\psi(x, t)$ para todo $x \in D$ y los gráficos de línea corresponden al corte radial $\psi(r, t)$, con r siendo la coordenada radial. Elaboración propia.

En un primer ejemplo, $\phi_0(r) = B(r; 0.4, 0.3) + B(r; 0.6, 0.3)$ y $\phi_1(r) = 0$, para cada $r \in [0, 1]$. Bajo estas circunstancias, la figura 2 muestra las soluciones del problema (8) en los tiempos $t = 0.100$ (superior izquierda), $t = 0.600$ (superior derecha), $t = 1.000$ (inferior izquierda) y $t = 2.00$ (inferior derecha). Los gráficos de la figura 2 muestran la solución aproximada $\phi(x, t)$, para cada $x \in D$. Mientras que los recuadros proporcionan el gráfico correspondiente de la función $\phi(r, t)$ en la coordenada radial. Los gráficos se obtuvieron utilizando la función isosurface de Matlab. En cada gráfico, el isovalor correspondiente fue dado por la línea roja del recuadro asociado.

Además del experimento descrito en el párrafo anterior en el presente se ha usado un conjunto adicional de condiciones iniciales, a saber, $\phi_0(r) = 2B(r; 0.5, 0.2)$ y $\phi_1(r) = 5\phi_0(r)$, para cada $r \in [0, 1]$. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3 para los tiempos $t = 0.100$ (superior izquierda), $t = 0.650$ (superior derecha), $t = 0.740$ (inferior izquierda) y $t = 6.00$ (inferior derecha).

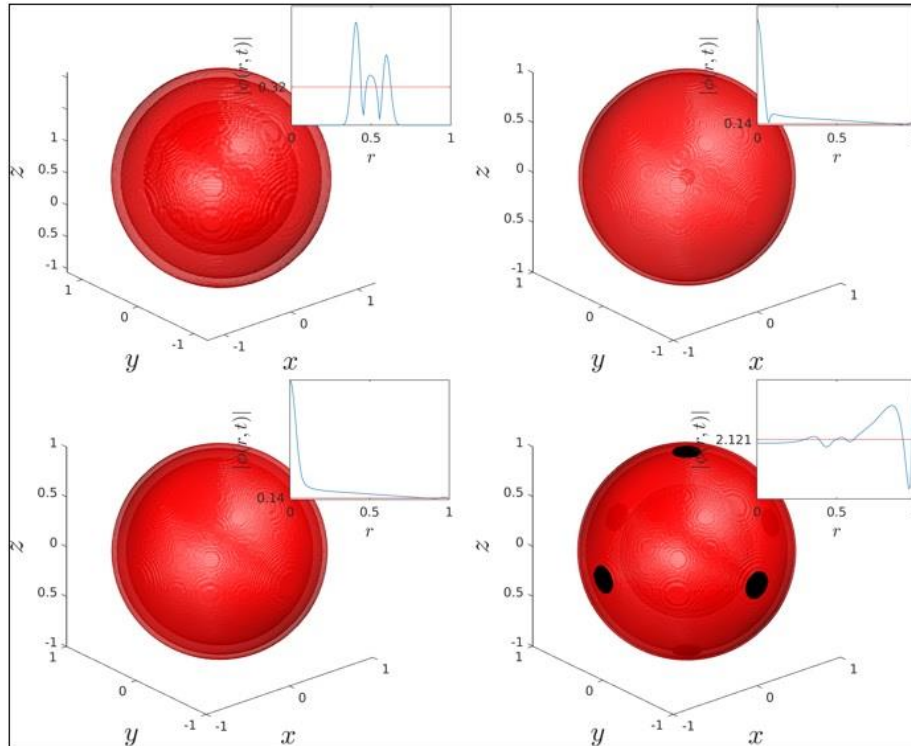


Figura 3. Representación gráfica de la aproximación de la solución $\psi(x, t)$, para cada $x \in D$ del primer problema para los tiempos $t = 0.100$ (superior izquierda), $t = 0.650$ (superior derecha), $t = 0.740$ (inferior izquierda) y $t = 6.00$ (inferior derecha), obtenidas mediante el esquema (8) para las condiciones iniciales $\phi_0(r) = 2B(r; 0.5, 0.2)$ y $\phi_1(r) = 5\phi_0(r)$, para cada $r \in [0, 1]$. Las representaciones tridimensionales la solución $\psi(x, t)$ para todo $x \in D$ y los gráficos de línea corresponden al corte radial $\psi(r, t)$, con r siendo la coordenada radial.

Elaboración propia.

DISCUSIÓN

De las simulaciones presentadas se resalta lo siguiente: en primer lugar, las simulaciones numéricas obtenidas ilustran el hecho de que el modelo numérico propuesto en este trabajo es una técnica estable cuando los parámetros computacionales son lo suficientemente pequeños, de lo contrario no es posible asegurar dicha estabilidad. En segundo lugar, comparando las simulaciones anteriores con las obtenidas en (Balogh et al., 2019). Vale la pena señalar que estos resultados están en buena concordancia cualitativa con los disponibles en la literatura. Esto proporciona fuerte evidencia sobre la precisión de nuestro modelo numérico y su implementación computacional.

CONCLUSIONES

En este trabajo se investigaron las soluciones radialmente simétricas de una generalización de la ecuación del bosón de Higgs en el espacio-tiempo de De Sitter. El modelo investigado aquí es un sistema tridimensional con datos de límite inicial en una esfera con centro en el origen de \mathbb{R}^3 . El sistema tiene un funcional de energía que se disipa con respecto al tiempo, y se expresó el modelo matemático, la energía total y la tasa de cambio de energía en términos de la nueva variable radial. Utilizando una metodología de diferencias finitas se propuso un modelo discreto implícito para aproximar las soluciones de la ecuación de interés de Higgs radialmente simétrica. Al mismo tiempo se proporcionó una forma discreta de la energía total del sistema y se demostró que el modelo discreto es una técnica disipativa. Se proporcionaron algunas simulaciones numéricas para mostrar la eficacia del enfoque presentado por los autores. En particular se proporcionaron ilustraciones de soluciones radialmente simétricas del modelo matemático y se exhibió la presencia de soluciones similares a burbujas del modelo matemático. En varios sentidos este manuscrito mejora informes previos disponibles en la literatura para resolver numéricamente la ecuación del bosón de Higgs en el espacio-tiempo de De Sitter.

Tras la realización de este trabajo quedan abiertas varias vías de investigación. Desde el punto de vista físico y la presente metodología pueden ser herramientas de simulación útiles en la investigación de soluciones radialmente simétricas de la ecuación del bosón de Higgs en el espacio-tiempo de De Sitter. Sin embargo, desde el punto de vista teórico la aplicabilidad del presente enfoque a problemas diferentes puede ser un tema de interés en diversas áreas de las matemáticas aplicadas. Como señaló uno de los revisores el presente enfoque y el análisis teórico pueden encontrar aplicaciones en la investigación de la dinámica del tráfico en redes de transporte, redes urbanas generales y redes urbanas y cadenas de suministro.

Otro tema de interés puede ser la viabilidad de ampliar el presente enfoque utilizando métodos de cuadratura diferencial. Además, una posible extensión de la presente metodología a formas fraccionarias de variantes de la ecuación del bosón de Higgs en el espacio-tiempo de De Sitter. Ya se han informado algunos avances, pero el diseño de esquemas totalmente hamiltonianos para ecuaciones de ondas disipativas sigue siendo una pregunta cuya respuesta falta en la literatura. Ya hay algunos informes disponibles en la literatura en esos escenarios, pero la mayoría de los esquemas propuestos en esos trabajos son discretizaciones hamiltonianas en los regímenes sin amortiguamiento.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a los revisores anónimos por sus comentarios y críticas.

REFERENCIAS

- ATLAS Collaboration., Aad, G., Abajyan, T., Abbott, B., Abdallah, J., Khalek, S. A., Abdelalim, A. A., ... Zwahlen, L. (2012). Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Physics Letters B*, 716(1), 1–29. doi: 10.1016/j.physletb.2012.08.020
- Balogh, A., Banda, J., & Yagdjian, K. (2019). High-performance implementation of a Runge–Kutta finite-difference scheme for the Higgs boson equation in the de Sitter spacetime. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 68, 15–30. doi: 10.1016/j.cnsns.2018.07.011
- Bezrukov, F., & Shaposhnikov, M. (2008). The Standard Model Higgs boson as the inflaton. *Physics Letters B*, 659(3), 703–706. doi: 10.1016/j.physletb.2007.11.072
- Carena, M., & Haber, H. E. (2003). Higgs boson theory and phenomenology. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 50(1), 63–152. doi: 10.1016/S0146-6410(02)00177-1
- Ellis, J., Gaillard, M. K., & Nanopoulos, D. V. (1991). A phenomenological profile of the Higgs boson. En *Current Physics—Sources and Comments* (Vol. 8, pp. 24–72). Elsevier.
- Muñoz-Pérez, L. F., & Macías-Díaz, J. E. (2020). On the solution of a generalized Higgs boson equation in the de Sitter space-time through an efficient and Hamiltonian scheme. *Journal of Computational Physics*, 109568. doi: 10.1016/j.jcp.2020.109568
- Muñoz-Pérez, L. F., Macías-Díaz, J. E., & Guerrero, J. A. (2020). A dissipation-preserving finite-difference scheme for a generalized Higgs boson equation in the de Sitter space-time. *Applied Mathematics Letters*, 107. doi: 10.1016/j.aml.2020.106425
- Strauss, W., & Vazquez, L. (1978). Numerical solution of a nonlinear Klein-Gordon equation. *Journal of Computational Physics*, 28(2), 271–278. doi: 10.1016/0021-9991(78)90038-4
- The CMS Collaboration., Sirunyan, A. M., Tumasyan, A., Adam, W., Ambrogio, F., Bergauer, T., Dragicevic, M., ... Trembath-reichert, S. (2020). A measurement of the Higgs boson mass in the diphoton decay channel. *Physics Letters B*, 135425. doi: 10.1016/j.physletb.2020.135425
- Tsuchiya, T., & Nakamura, M. (2019). On the numerical experiments of the Cauchy problem for semi-linear Klein–Gordon equations in the de Sitter spacetime. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 361, 396–412. doi: 10.1016/j.cam.2019.05.005
- Weinberg, S. (1995). *The Quantum Theory of Fields* (Vol. 2). UK: Cambridge University Press.
- Yagdjian, K. (2012). On the global solutions of the Higgs boson equation. *Communications in Partial Differential Equations*, 37(3), 447–478. doi: 10.1080/03605302.2011.641052



Esta obra está bajo una licencia internacional [Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Usted es libre de Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato
Adaptar — remezclar, transformar y construir a partir del material
La licenciente no puede revocar estas libertades en tanto usted siga los términos de la licencia

Atribución — Usted debe dar crédito de manera adecuada, brindar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que usted o su uso tienen el apoyo de la licenciente.

NoComercial — Usted no puede hacer uso del material con propósitos comerciales.

CompartirIgual — Si remezcla, transforma o crea a partir del material, debe distribuir su contribución bajo la misma licencia del original.