

## **Costo energético del cambio de la información cuántica mutua en un sistema de dos qubits**

Energetic cost of the change of mutual quantum information in a two-qubit system

**Manuel Ávila-Aoki<sup>1</sup>\*, María de Lourdes López-García<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, María Isabel, CP 56615, Valle de Chalco, Estado de México, México. Correos Electrónicos: [manvk@hotmail.com](mailto:manvk@hotmail.com); [benyana21@hotmail.com](mailto:benyana21@hotmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3951-6421>; <https://orcid.org/0000-0002-3011-3888>

\*Autor para correspondencia

Recibido: 2 de junio de 2022

Aceptado: 2 de diciembre de 2022

Publicado: 31 de enero de 2023

<https://doi.org/10.33064/iycuaa2023883740>  
e3740

### **Resumen**

Para evitar efectos no deseados donde se pierde la señal de los dos qubits (decoherencia), se considera un sistema de dos qubits expuestos a un reservorio común a muy bajas temperaturas. Se deriva una expresión para la Información Cuántica Mutua. Tal cantidad tiene una componente clásica y una componente estrictamente cuántica. Se halla el límite estrictamente cuántico donde las correlaciones cuánticas desaparecen. Al invocar la Primera Ley de la Termodinámica, se demuestra que el principio de conservación que subyace detrás de la ganancia (pérdida) de Información Cuántica Mutua será proporcional a la conservación de la energía interna del sistema a temperatura constante. En caso de ganancia (pérdida) de Información Cuántica Mutua el sistema tomará (cederá) energía interna de (hacia) los alrededores.

**Palabras claves:** dos-qubits; correlación clásica; discordia cuántica; información cuántica mutua; entropía; energía

### **Abstract**

In order to avoid unwanted effects where the signal of the two-qubit is lost (decoherence), it is considered a two qubits system exposed to a common reservoir at very low temperatures. It is derived as an expression for Mutual Quantum Information. Such a quantity has a classical component and also a quantum component. It is found to be a strictly quantum limit where classical correlations vanish. By invoking the First Law of Thermodynamics, it is shown that the concept of conservation behind the generation (loss) of Mutual Quantum Information will be proportional to the energy conservation of the system

at constant temperature. In case of generation (loss) of Quantum Information the system will absorb (transfer) internal energy from (towards) the environment.

**Key words:** two-qubits; classical correlation; quantum discord; mutual quantum information; entropy; energy

## Introducción

La cantidad de Información Cuántica es un ingrediente fundamental para diversos protocolos de la Informática Cuántica tales como Teleportación Cuántica (Bennet, 1993), Codificación Densa Cuántica (Bennet, 1992), Intercambio de entrelazamiento (Zukowski, 1993) y Criptografía Cuántica (Ekert, 1991). Para un sistema de dos qubits, la Información Cuántica permite caracterizar cuando dicho sistema es separable, entrelazado, clásicamente correlacionado ó cuánticamente correlacionado (Horodecki, 2001), (Horodecki, 2009), (Yang, 2010), (Yang, 2013). El termino Información Cuántica es muy genérico e incluye Correlaciones Clásicas, Entrelazamiento y Discordia Cuántica (Yang, 2013).

En Procesamiento de la Información Cuántica se ha reportado generación (pérdida) de la cantidad de Información Cuántica (Yang, 2010). De acuerdo a la Ley de Lavoisier (Morcillo, 1989) que refiere que "Nada se crea, nada se destruye, solo se transforma" surge la siguiente pregunta: ¿en que se transforma la cantidad de Información Cuántica en procesos donde hay ganancia (pérdida) de dicha cantidad? El objetivo del presente trabajo es responder esta pregunta. Para ello se considerará un sistema de dos qubits acoplado a un reservorio estructurado común a temperatura fija constante cercana al cero absoluto. Se halla que la ganancia (pérdida) de la cantidad de Información Cuántica Mutua está relacionada a la ganancia (pérdida) de la energía interna del sistema de dos qubits.

El presente trabajo se organiza como sigue: Primero se presenta el modelo. Posteriormente se halla una expresión algebraica para la cantidad información cuántica mutua. Luego se halla la relación entre la energía interna del sistema de dos qubits y la cantidad de información cuántica mutua. Se considera un caso particular de cambio de energía interna. Se hace una discusión y se concluye con un sumario.

## Materiales y Métodos

Consideremos un sistema cuántico abierto de dos qubits acoplados a un reservorio bosónico común a temperaturas cercanas al cero absoluto para evitar un ruido cuántico no deseado en los dos qubits de información cuántica. El Hamiltoniano del sistema total es

$$H = H_S + H_R + H_{int}, \quad (1)$$

donde  $H_S$  es el Hamiltoniano de los dos qubits,  $H_R$  es el Hamiltoniano del reservorio y  $H_{int}$  es el Hamiltoniano de interacción Sistema-Reservorio. En las aproximaciones dipolo y onda-rotante, el Hamiltoniano total puede ser desarrollado como (Maniscalco, 2008)

$$H_S = \omega_1 \sigma_+^1 \sigma_-^1 + \omega_2 \sigma_+^2 \sigma_-^2, \quad (2)$$

$$H_R = \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k, \quad (3)$$

$$H_{int} = (\alpha_1 \sigma_+^{(1)} + \alpha_2 \sigma_+^{(2)}) \sum_k g_k b_k + c \cdot h, \quad (4)$$

donde  $b_k^\dagger$  ( $b_k$ ) son los operadores de creación (aniquilación) de cuantos del reservorio,  $\sigma_\pm^{(a)}$  y  $\omega_a$  son el operador de inversión y la frecuencia de transición del qubit  $a$  ( $a = 1, 2$ ) respectivamente,  $\omega_k$  es la frecuencia asociada al modo  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) del reservorio y  $\alpha_a g_k$  describe la intensidad del acoplamiento entre el qubit  $a$  y el modo  $k$  del reservorio,  $\alpha_a$  es la constante de acoplamiento adimensional real midiendo la intensidad del acoplamiento Qubit-Reservorio. En lo que sigue se denotará la constante de acoplamiento colectiva mediante  $\alpha_T = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}$  y la intensidad relativa de interacción como  $r_a = \frac{\alpha_a}{\alpha_T}$  ( $a = 1, 2$ ).

El presente estudio se va a delimitar al caso en el cual solo una excitación en el sistema está presente además de que el reservorio está en el vacío. Asimismo, se supondrá que inicialmente ( $t = 0$ ) el sistema de dos qubits no está entrelazado con el reservorio y que el estado inicial de todo el sistema será

$$|\varphi(0)\rangle = [A|1\rangle_1|0\rangle_2 + B|0\rangle_1|1\rangle_2] \otimes_k |0_k\rangle_R, \quad (5)$$

donde  $A$  y  $B$  son números complejos tales que  $|A|^2 + |B|^2 = 1$ ,  $|0\rangle_a$  ( $|1\rangle_a$ ) es el estado base (excitado) del qubit  $a$  ( $a=1, 2$ ) y  $|0_k\rangle_R$  es el estado del reservorio con cero excitaciones en el modo  $k$ . El estado inicial  $|\varphi(0)\rangle$  evolucionará en el tiempo de acuerdo a  $|\varphi(t)\rangle = e^{-iHt}|\varphi(0)\rangle$  (Sakurai, 2017). Este estado puede ser factorizado como

$$|\varphi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_R + c_2(t)|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_R + \sum_k c_k(t)|0\rangle_1|0\rangle_2|0_k\rangle_R, \quad (6)$$

donde  $|0_k\rangle_R$  es el estado del reservorio con solo una excitación en el modo  $k$  y  $|0\rangle_R = \otimes_k |0_k\rangle$ . La matriz reducida de densidad de estados la cual es obtenida del operador  $|\varphi(t)\rangle\langle\varphi(t)|$  será la siguiente

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c_1(t)|^2 c_1(t) c_2^*(t) & 0 & 0 \\ 0 & c_1^*(t) c_2(t) & |c_2(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - |c_1(t)|^2 - |c_2(t)|^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Suponiendo que la densidad espectral del reservorio está dada por

$$J(\omega) = \frac{W^2 \gamma}{\pi (\omega - \omega_c)^2 + \gamma^2}, \quad (8)$$

donde  $\omega_c$  es la frecuencia fundamental de la cavidad, la solución de la respectiva ecuación de Schrödinger estará dada por (Yang, 2013)

$$c_1(t) = [r_2^2 + r_1^2 \epsilon(t)] c_1(0) - r_1 r_2 [1 - \epsilon(t)] c_2(0), \quad (9)$$

$$c_2(t) = -r_1 r_2 [1 - \epsilon(t)] c_1(0) + [r_1^2 + r_2^2 \epsilon(t)] c_2(0), \quad (10)$$

siendo

$$\epsilon(t) = e^{-\frac{(\gamma - i\delta(t))t}{2}} \left[ \cosh(\Omega t/2) + \frac{(\gamma - i\delta(t))}{\Omega} \sinh(\Omega t/2) \right], \quad (11)$$

donde  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ,  $\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \Omega_R^2 - 2i\delta\gamma}$ ,  $\Omega_R = \sqrt{4W^2\alpha_T^2 + \gamma^2}$  la frecuencia de Rabi generalizada y  $R = W\alpha_T$  la frecuencia de Rabi en el vacío. En las ecuaciones (9) y (10), los coeficientes  $c_1(t)$  y  $c_2(t)$  representan las amplitudes de probabilidad de encontrar el sistema de dos qubits en el estado  $|00\rangle$  y  $|11\rangle$  respectivamente.

#### - Información cuántica mutua

Para dos subsistemas A y B descritos por un estado cuántico bipartita,  $\rho_{AB} = \rho_S$ , la correlación total entre ellos será la información cuántica mutua (Maziero, 2009)

$$\tau(\rho_S) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_S), \quad (12)$$

donde  $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$  es la entropía de Von Neumann de la matriz de densidad  $\rho$  y  $\rho_A$  ( $\rho_B$ ) es el operador reducido de densidad para los subsistemas A (B). Por otra parte, la información cuántica mutua está definida también, en términos de la correlación cuántica (discordia cuántica) (Ollivier, 2001)  $D$  y la correlación clásica  $C$  (Vedral, 2003) a través de

$$\tau(\rho_S) = D(\rho_S) + C(\rho_S). \quad (13)$$

La expresión analítica para las correlaciones clásicas será la siguiente

$$C(\rho_S) = [1 - |c_1(t)|^2 - |c_2(t)|^2] \log_2 [1 - |c_1(t)|^2 - |c_2(t)|^2] - \sum_{a=1,2} [1 - |c_a(t)|^2] \log_2 [1 - |c_a(t)|^2]. \quad (14)$$

Por otra parte, la correlación cuántica será

$$D(\rho_S) = |c_1(t)|^2 \log_2 \left( 1 + \frac{|c_2(t)|^2}{|c_1(t)|^2} \right) + |c_2(t)|^2 \log_2 \left( 1 + \frac{|c_1(t)|^2}{|c_2(t)|^2} \right). \quad (15)$$

- *Energía interna e información cuántica*

De acuerdo a la Primera Ley de la Termodinámica (Bailyn, 1994), en ausencia de fuerzas externas la energía interna total  $U$ , estará dada por

$$\Delta U = T \Delta S, \quad (16)$$

donde  $T$  es la temperatura del sistema y  $S$  es la entropía del sistema. De acuerdo a las Ecs. (12), (13) y (16) la energía interna  $U$  estará relacionada a la información cuántica  $\tau$  a través de

$$\Delta U = T \Delta \tau = T(\Delta D + \Delta C). \quad (17)$$

## Resultados

En lo que sigue supondremos sin pérdida de generalidad que  $c_1(t=0) = 1$  y  $c_2(t=0) = 0$ . Para tiempos remotos, los coeficientes de las Ecs. (9) y (10) serán  $c_1(t \rightarrow \infty) = r_2^2$  y  $c_2(t \rightarrow \infty) = -r_1 r_2$ . Por otra parte, la Ecuación (17) nos dice que en este límite el incremento de energía interna e información cuántica estará dado por

$$U(t \rightarrow \infty) - U(t=0) = T[\tau(t \rightarrow \infty) - \tau(t=0)]. \quad (18)$$

De las Ecs. (9), (10), (11), (14), (15) y (17) se tendrá que

$$U(t \rightarrow \infty) - U(t=0) = T \left[ r_2^4 \log_2 \left( 1 + \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) + r_1^2 r_2^2 \log_2 \left( 1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (1 - r_2^4 - r_1^2 r_2^2) \log_2 (1 - r_2^4 - r_1^2 r_2^2) - (1 - r_2^4) \log_2 (1 - r_2^4) - (1 - r_1^2 r_2^2) \log_2 (1 - r_1^2 r_2^2) \right]. \quad (19)$$

Vale la pena observar que en el caso límite estrictamente cuántico cuando  $r_2 \ll 1$ , la correlación clásica de la Ec. (14) es nula en tiempos remotos y solo sobrevive la correlación cuántica (discordia). En este límite la Ec. (19) se reduce a

$$U(t \rightarrow \infty) - U(t = 0) = T r_1^2 r_2^2 \log_2 \left( 1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right). \quad (20)$$

De la Ecuación anterior se puede observar que  $U(t \rightarrow \infty) - U(t = 0) > 0$  por lo que en tiempos remotos hay ganancia tanto de Energía Interna así como de Información Cuántica. Dicha ganancia de la energía interna es en el sistema de dos qubits. Esta energía es tomada del reservorio que se supone suficientemente grande de tal manera que permanece en equilibrio termodinámico ante el cambio de energía del sistema de dos qubits. Por otra parte, los cambios en el sistema de información de dos qubits se dan entre estados de equilibrio termodinámico. Al ser los estados inicial y final de equilibrio termodinámico, no es necesario tomar en cuenta la decoherencia o pérdida de señal de los dos qubits de información.

### **Discusión**

La Ley de Lavoisier referente a que "Nada se crea, nada se destruye, sólo se transforma" da lugar a la siguiente intrigante pregunta: ¿Cuál es el principio de conservación que subyace en el fondo para procesos de Procesamiento de la Información Cuántica donde se gana (pierde) Información Cuántica? Es decir, ¿de dónde viene la Información Cuántica ganada por el sistema de qubits? O bien ¿en que se transforma la Información Cuántica perdida por el sistema de qubits? Para responder a dichas preguntas en el presente trabajo se ha invocado a la Ley de Conservación de la Energía en la forma de la Primera Ley de la Termodinámica. Para fundamentar lo anterior se emplea la hipótesis de que la Información Cuántica Mutua se define tanto en términos de la Entropía del sistema de qubits así como las correlaciones cuánticas y clásicas del sistema de qubits. Así, el cambio en la Información Cuántica del sistema de qubits es proporcional al intercambio de Energía Interna del sistema a temperatura constante. De donde entonces una formulación más precisa de la hipótesis es la siguiente: Si el sistema de qubits gana (pierde) cantidad de información cuántica entonces el sistema recibe (cede) energía de los alrededores, como se ejemplifica en la Figura 1.

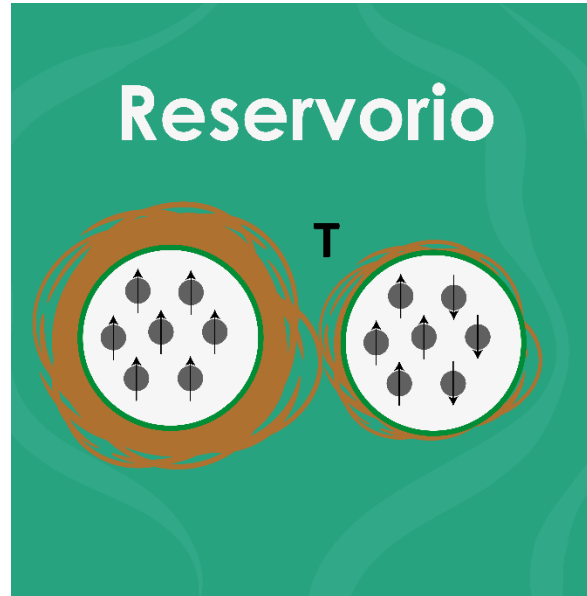


Figura 1. El intercambio de energía del ambiente al sistema deriva en una ganancia de información del sistema, es decir, la energía del ambiente se absorbe transformándola en información.

Por razones históricas comúnmente se considera a la Entropía como una cantidad estrictamente clásica macroscópica. En el presente trabajo se ha mostrado que la Entropía es una cantidad que contiene tanto elementos clásicos, así como elementos cuánticos tal como lo muestra la Ecuación (13). En dicha ecuación se puede apreciar que la cantidad de Entropía del sistema de qubits es la suma de las correlaciones clásicas y las correlaciones cuánticas. De hecho, en el presente trabajo se ha hallado el límite en el cual la cantidad de Entropía del sistema de dos qubits se nutre estrictamente de las correlaciones cuánticas tal como lo muestra la Ecuación (20). Dicho límite se puede caracterizar como la cantidad de la Entropía.

## Conclusiones

Una suposición básica para el presente trabajo es que los dos qubits bajo estudio están expuestos a un reservorio común. Dicha hipótesis lleva a que la matriz reducida de densidad de estados de la Ecuación (7) tenga una forma simétrica. Se ha hallado una expresión para la información cuántica  $\tau$  dada por la Ecuación (13). La información cuántica tiene una componente clásica y una componente estrictamente cuántica. Se ha hallado también que el límite ultra cuántico donde las correlaciones cuánticas desaparecen se alcanza cuando  $r_2 \ll 1$ . El concepto de conservación que subyace detrás de la ganancia (pérdida) de Información Cuántica será proporcional a la conservación de la energía interna del sistema a temperatura constante. En caso de ganancia (pérdida) de Información Cuántica

el sistema tomará (cederá) energía interna de (hacia) los alrededores (baño bosónico). Uno de los aspectos importantes del presente trabajo es que se evita el trabajo engorroso y poco claro de enfoques anteriores, en cuantificar la ganancia (perdida) de información cuántica mutua en un sistema de dos qubits. Por lo anterior, el presente trabajo pavimenta el camino para enfoques mas generales donde se consideren sistemas de N qubits y el cálculo de su información cuántica asociada.

## Referencias

- Horodecki M., Horodecki P. & Horodecki R. (2001). Mixed-State Entanglement and Quantum Communication. *In Introduction to Basic Theoretical Concepts and Experiments* (pp. 151-195), Berlin, Alemania: Springer-Verlag.
- Baily, M. (1994). *A Survey of Thermodynamics*, New York, USA: American Institute of Physics Press.
- Bennett, C.H. and Wiesner, S.J. (1992) Communication via One and Two Particle Operators on Einstein-Podolsky-Rosen States. *Physical Review Letters* 69(20), 2881-2889.
- Bennett, C. H., Brassard, G., Crepeau, C., Jozsa, R., Peres, A. and Wootters, W. K. (1993) Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters* 70(13), 1895-1899.
- Ekert A. K. (1991) Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Physical Review Letters* 67(6), 661-663.
- Horodecki R., Horodecki P., Horodecki M., Horodecki K. (2009) Quantum Entanglement, *Reviews of Modern Physics* 81(2), 865-942.
- Maniscalco S., Francica F., Zaffino R. L., LoGullo N. L. & Plastina F. (2008) Protecting Entanglement via the Quantum Zeno Effect, *Physical Review Letters* 100(9), 090503-090511.
- Maziero J., C'eleri L. C., Serra R. M., & Vedral V. (2009) Classical and quantum correlations under decoherence, *Physical Review A* 80(4), 044102-044109.
- Morcillo J. (1977), *Temas Básicos de Química*. Madrid, España: Alhambra
- Ollivier H. & Zurek W. H. (2001) Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations, *Physical Review Letters* 88(1), 017901-017912.
- Sakurai J. J. & Napolitano J. (2017) *Modern Quantum Mechanics*, Cambridge University Press.
- Vedral V. (2003) Classical Correlations and Entanglement in Quantum Measurements, *Physical Review Letters* 90(5), 050401-050408.



- Yang X. & Xiao J.-H (2013) Dynamics of quantum discord for a two-qubit system, *Optoelectronics Letters* 9(1), 69-72.
- Yang X. & Zou H.-M (2010) Preparation and transfer of entanglement in atomic ensembles interacting with cavity fields, *Optoelectronics Letters* 6(2), 144-147.
- Zukowski M., Zeilinger A., Horne M. A., Ekert A. K. (1993) "Event-ready-detectors" Bell experiment via entanglement swapping, *Physical Review Letters* 71(26), 4287-4291