

Ley de enfriamiento de Newton de orden fraccionario

Fractional Newton cooling law

José Francisco Gómez Aguilar^{1*}, José Roberto Razo Hernández²

Gómez Aguilar, J. F., Razo Hernández, J. R., Ley de enfriamiento de Newton de orden fraccionario. *Investigación y Ciencia de la Universidad Autónoma de Aguascalientes*. Número 61: 12-18, enero-abril 2014.

RESUMEN

En este trabajo se propone una nueva ecuación diferencial fraccionaria que describe la ley de enfriamiento de Newton. El orden de la derivada a considerar es $0 < \gamma \leq 1$. Para mantener la consistencia con la ecuación física se introduce un nuevo parámetro σ . Este parámetro caracteriza la existencia de estructuras fraccionarias en el sistema. Se muestra que existe una relación entre el orden de la derivada fraccionaria γ y el nuevo parámetro σ . Debido a esta relación las soluciones de las correspondientes ecuaciones diferenciales fraccionarias están dadas en términos de la función de Mittag-Leffler, cuyas soluciones dependen sólo del orden fraccionario γ . Los casos clásicos son recuperados en el límite cuando $\gamma=1$.

Palabras clave: cálculo fraccionario (CF), ley de enfriamiento de Newton, funciones de Mittag-Leffler, ecuaciones diferenciales fraccionarias, derivada de Caputo, difusión anómala.

Keywords: fractional calculus, Newton cooling law, Mittag-Leffler functions, fractional differential equations, Caputo derivative, anomalous diffusion.

Recibido: 1 de julio de 2013, aceptado: 26 de febrero de 2014

¹ Departamento de Materiales Solares, Instituto de Energías Renovables, Universidad Nacional Autónoma de México.

² Departamento de Electromecánica, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato.

* Autor para correspondencia: jgomez@ier.unam.mx

ABSTRACT

In this contribution we propose a new fractional differential equation to describe the Newton cooling law. The order of the derivatives is $0 < \gamma \leq 1$. In order to be consistent with the physical equation, a new parameter σ is introduced. This parameter characterizes the existence of fractional structures in the system. A relation between the fractional order time derivative γ and the new parameter σ is found. Due to this relation, the solutions of the corresponding fractional differential equations are given in terms of the Mittag-Leffler function depending only on the parameter γ . The classical cases are recovered by taking the limit when $\gamma=1$.

INTRODUCCIÓN

Aunque los fundamentos matemáticos del cálculo fraccionario (CF) se establecieron hace más de 200 años, sigue siendo un tema novedoso para los matemáticos. El cálculo de orden fraccionario no había sido utilizado en ingeniería debido a su complejidad y a la aparente descripción satisfactoria de los fenómenos con el cálculo de orden entero (ordinario), aunado al hecho de que no tiene una interpretación física y geométrica totalmente aceptable (Tenreiro Machado, 2003). Sin embargo, debido al hecho de que representa con mayor precisión algunos comportamientos naturales relacionados con diferentes áreas de la ingeniería, se ha venido utilizando con mayor frecuencia. Por ello, este tipo de ecuaciones ha asumido un papel importante para modelar la dinámica anómala de numerosos procesos relacionados con los sistemas complejos en muchas áreas de la ciencia y de la ingeniería (Wyss, 1986; Hilfer, 2000; Metzler y Klafter,

2000; Agrawal, Tenreiro Machado y Sabatier, 2004; González Gaxiola y Santiago, 2012). Entre las áreas en las que ha tenido más impacto destacan la física, la mecánica, la ingeniería, las finanzas, el electromagnetismo, la teoría de circuitos eléctricos, la bioingeniería, entre otras (Caputo, 1971; Hilfer, 1974; West, 2003; Magin y Ovadia, 2008; Petras, 2010; Obeidat, Gharibeh, Al-Ali y Rousan, 2011; Gómez Bernal, Rosales y Córdova, 2012; Gómez Aguilar, Rosales García, Guía Calderón y Bernal Alvarado, 2012; Gómez Aguilar, Rosales García, Bernal Alvarado, Córdova Fraga y Guzmán Cabrera, 2012; Rosales, Guía, Gómez y Tkach, 2012; Guía, Gómez y Rosales, 2013). Se pueden encontrar consideraciones físicas fundamentales a favor del uso de modelos basados en derivadas de orden no entero (Veliev & Engheta, 2004; Baleanu, Gūnvenc y Tenreiro Machado, 2010).

La ventaja de utilizar sistemas de orden fraccionario respecto a los sistemas de orden entero es que los primeros tienen memoria infinita, mientras que los otros tienen una memoria finita. Esta es la principal ventaja del uso del CF en comparación con los modelos clásicos de orden entero en los que tales efectos son, de hecho, despreciados. A diferencia de los trabajos mencionados anteriormente, donde el paso de la derivada ordinaria a una fraccionaria se realiza de manera directa, en Gómez, Bernal et al. (2012) se propone una manera sistemática de construir ecuaciones diferenciales fraccionarias tomando en cuenta la consistencia de los parámetros físicos, esto se realiza añadiendo un parámetro auxiliar σ , el cual tiene la función de normalizar las unidades físicas de la ecuación. El objetivo principal de este trabajo es la construcción sistemática de la ecuación diferencial que representa la ley de enfriamiento de Newton y la interpretación de los resultados arrojados.

Para analizar el comportamiento dinámico de un sistema fraccionario se necesita el uso de una definición apropiada de derivada fraccionaria. La complejidad del cálculo fraccionario radica en las múltiples definiciones que lo describen. Algunas definiciones comunes se encuentran en Podlubny (1994). De hecho, las definiciones de la derivada de orden fraccionario no son únicas y existen varias definiciones, incluyendo Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Weyl, Riesz, y la representación de Caputo. En la derivada de Caputo, si $f(t)$ es una constante, entonces su derivada de orden gamma es cero, lo que no ocurre con otras representaciones y se pueden

definir adecuadamente las condiciones iniciales para las ecuaciones diferenciales fraccionarias con la finalidad de que puedan ser manejadas de manera análoga al caso entero. La derivada de Caputo implica un efecto de memoria por medio de una convolución entre la derivada de orden entero y una potencia en el tiempo (Podlubny, 1994; Gutiérrez, Rosário y Tenreiro Machado, 2010). Por estas razones, en este documento se prefiere usar la derivada fraccionaria de Caputo (Podlubny, 1994), la cual está definida por:

$$D^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma+1}} d\tau, \quad (1)$$

donde $n-1 < \gamma \leq n$ (n es un entero, $1, 2, \dots \in \mathbb{N}$), y $f^{(n)}(\tau)$ representa la derivada de orden n de la función real evaluada en t . Otra característica muy importante en la forma de Caputo de la derivada fraccionaria es que su transformada de Laplace es:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad (2)$$

lo que supone que $f(t)$ no está definido para $t < 0$, entonces:

$$L\{D^\gamma f(t)\} = s^\gamma F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)s^{\gamma-k-1}, \quad (3)$$

De la ecuación anterior se puede observar que la representación de la derivada de Caputo en el dominio de Laplace utiliza las condiciones iniciales $f^{(k)}(0)$, donde k es entero. Si las condiciones iniciales son cero, se tiene la definición habitual de la transformada de Laplace cuando γ es un entero. En general, una ecuación diferencial de orden fraccionario tiene la forma

$$\sum_{k=0}^n a_k D^{\gamma_k} f(t) = g(t), \quad (4)$$

donde $\gamma_k > \gamma_{k-1}$ y a_k son cualesquiera números reales, $g(t)$ es la fuente de algún sistema dinámico. La transformada inversa para $0 < \gamma < 1$ requiere la introducción de una función especial, la función de Mittag-Leffler (Dorrego y Cerutti, 2012), esta función es muy importante debido a que es el análogo al uso de la función exponencial en los sistemas de orden entero. La función está definida como

$$E_{a,b}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{\Gamma(am+b)}, \quad (a, b > 0), \quad (5)$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma.

MATERIALES Y MÉTODOS

La transferencia de calor está relacionada con los cuerpos calientes y fríos llamados fuente y receptor; aquí se llevan a cabo procesos como condensación, vaporización, cristalización, reacciones químicas, etc., en donde la transferencia de calor tiene sus propios mecanismos y cada uno de ellos cuenta con características peculiares. La transferencia de calor es importante en los procesos porque es un tipo de energía que se encuentra en movimiento debido a una diferencia de temperaturas (gradiente); por tanto, existe la posibilidad de enfriamiento. Sin embargo, esta energía en lugar de perderse sin ningún uso es susceptible de transformarse en energía mecánica; por ejemplo, para producir trabajo, generar vapor, calentar una corriente fría, etc.

El cálculo fraccionario ha resultado una poderosa herramienta en la descripción de fenómenos complejos como la difusión anómala de la transferencia de calor (Metzler y Klaffer, 2000). En virtud de lo anterior es importante hacer una generalización utilizando operadores fraccionarios de la ecuación experimental empírica que relaciona la temperatura de enfriamiento de una cantidad de sustancia respecto al medio (ley de enfriamiento de Newton) y ajustar el orden de la ecuación diferencial fraccionaria que mejor describa a estos fenómenos. Experimentalmente se puede demostrar, y bajo ciertas condiciones es posible obtener una buena aproximación a la temperatura de una sustancia mediante la ley de enfriamiento de Newton. Esta puede enunciarse de la siguiente manera: "La temperatura de un cuerpo cambia a una velocidad que es proporcional a la diferencia de las temperaturas entre el medio externo y el cuerpo".

Lo anterior puede representarse como:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \quad (6)$$

donde t es la variable independiente y representa al tiempo, T es la temperatura del cuerpo, T_a es la temperatura del ambiente y k es una constante positiva llamada coeficiente de convección.

Para encontrar la solución de esta ecuación utilizamos la transformada de Laplace. Considerando a $T(0)=T_0$ como condición inicial, la solución de esta ecuación está dada por

$$T(t) = T_a + ce^{-kt}. \quad (7)$$

El valor de la constante k depende de las características del sistema, este coeficiente depende de las condiciones en la capa límite en las que influyen la geometría de la superficie, la naturaleza del movimiento del fluido y una variedad de las propiedades termodinámicas del fluido y de transporte. Existen tablas de valores para k que dependen del material con que está construido el sistema.

Representación fraccionaria de la ley de enfriamiento de Newton

Algunos autores reemplazan la derivada de orden entero por una fraccionaria en un contexto puramente matemático. Sin embargo, desde el punto de vista físico y de ingeniería esto no es del todo correcto debido a los parámetros físicos que existen en la ecuación diferencial y éstos no tienen la dimensionalidad obtenida en el laboratorio. Una posible solución es reemplazar el operador derivada temporal ordinario por el fraccionario en la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d^\gamma}{dt^\gamma}, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (8)$$

De la ecuación (8) se puede observar que esta representación no es correcta desde el punto de vista físico, debido a que el operador de derivada temporal d/dt tiene dimensión de segundos inversos s^{-1} , mientras que el operador derivada fraccionaria en el tiempo d^γ/dt^γ tiene s^γ . Para ser coherente con la dimensionalidad se propone introducir un parámetro auxiliar σ de la siguiente manera:

$$\left[\frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \right] = \frac{1}{s}, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (9)$$

donde γ es un parámetro arbitrario que representa el orden de la derivada. En el caso $\gamma=1$ la expresión (9) se convierte en un operador derivada ordinario. De esta forma (9) es dimensionalmente consistente si y sólo si el nuevo parámetro σ tiene dimensiones temporales $[\sigma]=\text{segundos}$. Este tiempo se denomina tiempo cósmico y es un tiempo no local (Podlubny, 2002). El operador fraccionario se define como

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma}{dt^\gamma}, \quad n-1 < \gamma \leq n. \quad (10)$$

La expresión (10) es una derivada temporal debido a que su dimensión es s^{-1} . El parámetro σ representa las componentes fraccionarias temporales, estas componentes muestran un comportamiento intermedio entre un sistema conservativo y un disipativo (Gómez, Bernal et al., 2012).

Para la ley de enfriamiento de Newton se tiene

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a), \quad (11)$$

$$\frac{1}{\sigma^{1-\gamma}} \frac{d^\gamma T}{dt^\gamma} = -k(T - T_a), \quad (12)$$

$$\frac{d^\gamma T}{dt^\gamma} + k\sigma^{1-\gamma}(T - T_a) = 0. \quad (13)$$

Aplicando la transformada de Laplace (Podlubny, 1994) a (13) se tiene

$$s^\gamma T(s) - s^{\gamma-1}T_0 + k\sigma^{1-\gamma}T(s) - \frac{k\sigma^{1-\gamma}T_a}{s} = 0, \quad (14)$$

$$T(s) = \frac{k\sigma^{1-\gamma}T_a}{s(s^\gamma + k\sigma^{1-\gamma})} + \frac{s^{\gamma-1}T_0}{s^\gamma + k\sigma^{1-\gamma}}. \quad (15)$$

Si se considera que $a = k\sigma^{1-\gamma}$ y se sustituye en (15) se tiene

$$T(s) = \frac{aT_a}{s(s^\gamma + a)} + \frac{s^{\gamma-1}T_0}{s^\gamma + a}. \quad (16)$$

La transformada inversa de Laplace (Podlubny, 1994) de (16) es

$$T_a \frac{a}{s(s^\gamma + a)} = T_a(1 - E_\gamma(-at^\gamma)), \quad (17)$$

$$T_0 \frac{s^{\gamma-1}}{s^\gamma + a} = T_0(E_\gamma(-at^\gamma)). \quad (18)$$

Sustituyendo (17) y (18) en (16) se tiene

$$T(t) = T_a(1 - E_\gamma(-at^\gamma)) + T_0E_\gamma(-at^\gamma). \quad (19)$$

Sustituyendo $a = k\sigma^{1-\gamma}$ en (19) se tiene

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)E_\gamma(-k\sigma^{1-\gamma}t^\gamma). \quad (20)$$

La ecuación (20) corresponde a la ley de enfriamiento de Newton fraccionaria. Si sustituimos $\gamma = 1$, se tiene

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)E_\gamma(-k\sigma^{1-\gamma}t^\gamma) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}. \quad (21)$$

La ecuación (21) coincide completamente con el resultado calculado para el caso clásico.

Se puede notar que el parámetro γ , el cual caracteriza el orden de la derivada fraccionaria, puede ser relacionado con el parámetro σ y el parámetro k , el cual representa las propiedades de transmisión de calor del medio con la muestra y cuyas unidades son s^{-1} , con esto se puede definir

$$\gamma = k\sigma, \quad (22)$$

donde:

$$\sigma = \frac{\gamma}{k}. \quad (23)$$

Se puede definir la magnitud $\delta = 1 - \gamma$, la cual caracteriza la existencia de componentes fraccionarias en el sistema. Es fácil ver que cuando $\gamma = 1$, se tiene $\sigma = 1/k$, y el valor de $\delta = 0$, resultando que en el sistema no existen componentes fraccionarias (caso clásico). Sin embargo, en el intervalo $0 < \gamma < 1$, δ crece y tiende a la unidad, apareciendo en el sistema componentes fraccionarias.

Al sustituir σ en la ecuación (20) se tiene

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)E_\gamma[(-k^\gamma \gamma^{1-\gamma} t^\gamma)]. \quad (24)$$

La ecuación (24) corresponde a la ley de enfriamiento de Newton fraccionaria; esta ecuación sólo depende del parámetro γ y es consistente con las unidades obtenidas en el laboratorio.

RESULTADOS

Para realizar la simulación consideraremos $T(0) = T_0$; $T(1) = 55$; $T(5) = 30$; $T_a = 5$, elegidos arbitrariamente. Se simuló la ecuación $T(t)$ para diferentes valores de γ , los cuales fueron $\gamma = [1.00; 0.98; 0.96; 0.94]$, los resultados fueron graficados en una sola imagen para poder comparar.

En la simulación podemos apreciar efectos muy interesantes de la ecuación fraccionaria. Para el caso con $\gamma = 1$, la respuesta es idéntica al resultado graficado en el caso clásico, por lo que podemos asegurar

que la función encontrada con el procedimiento de transformada de Laplace fraccionaria es correcto. Cuando γ disminuye su valor se observa que el efecto de transmisión de temperatura se reduce; es decir, que la temperatura del cuerpo disminuye más lento con el tiempo, esto puede proveer una mejor aproximación al resultado obtenido en un experimento real sin necesidad de agregar otros términos a la ecuación,

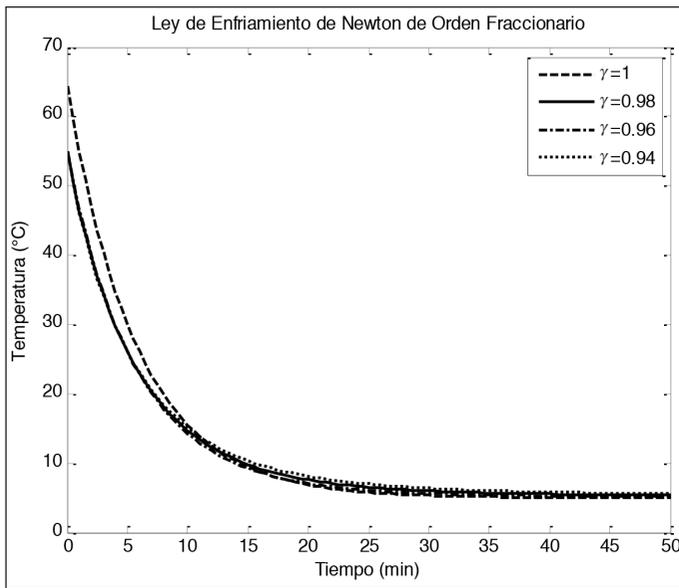


Figura 1. Simulación para $\gamma=1$, $\gamma=0.98$, $\gamma=0.96$ y $\gamma=0.94$.

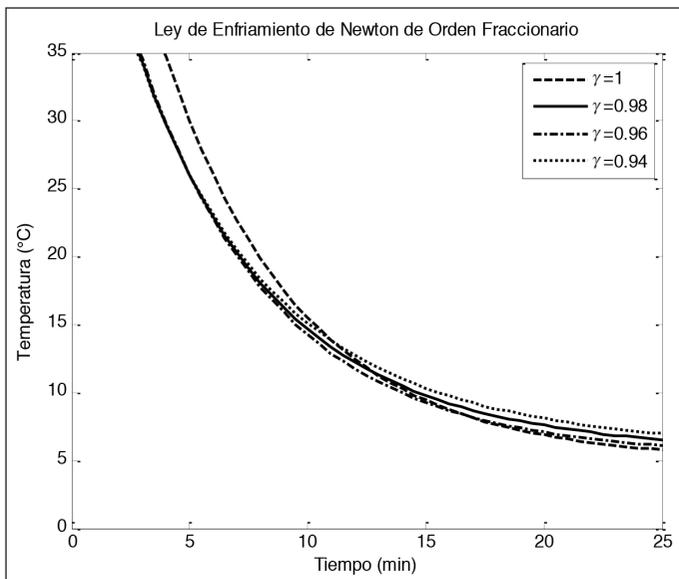


Figura 2. Acercamiento a la simulación para $\gamma=1$, $\gamma=0.98$, $\gamma=0.96$ y $\gamma=0.94$.

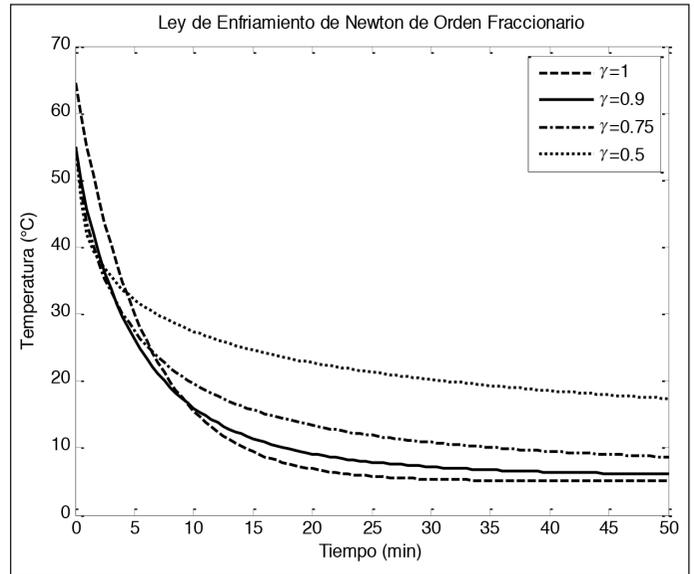


Figura 3. Simulación para $\gamma=1$, $\gamma=0.9$, $\gamma=0.75$ y $\gamma=0.5$.

al recordar que la ley de enfriamiento de Newton es una buena aproximación sólo cuando la diferencia de temperaturas es pequeña y el tiempo es corto.

Finalmente, el cálculo fraccionario permite simplificar el modelado de sistemas complejos, como es el caso de la transferencia de calor, mediante ecuaciones más simples. Al aplicar la definición de cálculo fraccionario a la ley de enfriamiento de Newton se obtiene una representación en la cual están intrínsecos fenómenos de difusión anómala, ya que estos fenómenos surgen a partir del incremento de la correlación en el movimiento de las partículas que componen al material en estudio. Estos fenómenos no pueden ser descritos mediante la ley de enfriamiento de orden entero debido a que en el modelado de los sistemas físicos se toman en cuenta procesos ordinarios (es decir, siguen leyes físicas clásicas), pero el medio es complejo; no sólo por ser no homogéneo en el sentido clásico, sino porque el medio se descompone de modo más o menos aleatorio en componentes altamente heterogéneas con muy distinta escalabilidad.

DISCUSIÓN

El CF puede representar sistemas dinámicos y fenómenos complejos no lineales utilizando un menor número de coeficientes debido a que el orden arbitrario de la derivada le da un grado de libertad adicional que permite ajustarse a un comportamiento específico. La representación fraccionaria de la ley de enfriamiento de Newton permite agregar un grado

de libertad adicional γ con lo cual se puede ajustar la curva que representa la temperatura del cuerpo, así como el coeficiente de convección, que en este caso está representado por k^γ . Las Figuras 1, 2 y 3 muestran que la aplicación de los operadores fraccionarios introducen de manera natural los términos de memoria que describe el CF y corresponden a la disipación intrínseca del sistema. Dado que las unidades presentes en la ecuación (23) son segundos, podemos definir un tiempo de relajación fraccionario. Este tiempo representa el tiempo característico necesario para una pérdida de energía coherente de los sistemas, si γ tiende a cero se tiene una disminución en el tiempo de relajación fraccionario y la existencia de estructuras fraccionarias, cuando γ tiende a la unidad se tiene un tiempo de relajación ordinario y las estructuras fraccionarias no están presentes. Al existir una diferencia térmica en el sistema se produce una región llamada capa límite térmica, el parámetro que caracteriza esta conductividad térmica es el coeficiente de convección k . Este coeficiente ahora ya no es local y está dado por k^γ .

CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha propuesto la ecuación diferencial fraccionaria que describe a la ley de

enfriamiento de Newton. El aspecto relevante de este trabajo es la introducción del operador fraccionario sistematizando su construcción y considerando la dimensionalidad física existente mediante la introducción de un nuevo parámetro σ . Este parámetro caracteriza la existencia de estructuras fraccionarias en el sistema. Se ha encontrado también la relación entre el parámetro σ y el orden de la ecuación diferencial $0 < \gamma \leq 1$, muestra que las soluciones de la ecuación están dadas en términos de la función de Mittag-Leffler dependiendo solo del parámetro γ .

Fenómenos como el efecto Mpemba (Monwhea, 2006), en el que el agua hirviendo se congela más rápido que el agua a una temperatura más baja es un ejemplo de fenómeno de conducción y difusión anómala; desde la perspectiva del cálculo fraccionario se puede encontrar una mejor descripción de los fenómenos físicos presentes y la descripción detallada de este efecto. Otra posible aplicación del modelo descrito consiste en estimar el flujo de calor existente entre un cuerpo y un fluido homogéneo después de que el cuerpo sea introducido en fluido, el problema radica en corregir la conductividad térmica del fluido por una nueva conductividad térmica, que en este caso sería representada por k^γ . Avances relacionados se presentarán en futuros trabajos.

LITERATURA CITADA

- AGRAWAL, O. P., TENREIRO MACHADO, J. A., y SABATIER, I. (eds.). *Fractional Derivatives and Their Applications*. Nonlinear Dynamics, 38. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- BALEANU, D., GÜNVENC, Z. B., y TENREIRO MACHADO, J. A. (eds.). *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*. Springer, 2010.
- CAPUTO, M. y MAINARDI, F. A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics*, 91(8): 134-147, 1971.
- DORREGO, G. A. y CERUTTI, R. A. The k -Mittag-Leffler function. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 7(13-16): 705-716, 2012.
- GÓMEZ AGUILAR, J. F., ROSALES GARCÍA, J., BERNAL ALVARADO, J. J., CÓRDOVA FRAGA, T. y GUZMÁN CABRERA, R. Fractional mechanical oscillators. *Revista Mexicana de Física*, 58: 348-352, 2012.
- GÓMEZ AGUILAR, F., ROSALES GARCÍA, J., GUÍA CALDERÓN, M., y BERNAL ALVARADO, J. Analysis of Equivalent Circuits for Cells: A Fractional Calculus Approach. *Ingeniería, Investigación y Tecnología, UNAM*, XIII(3): 375-384, 2012.
- GÓMEZ, F., BERNAL, J., ROSALES, J., y CÓRDOVA, T. Modeling and Simulation of Equivalent Circuits in Description of Biological Systems-A Fractional Calculus Approach. *Journal of Electrical Bioimpedance*, 3: 2-11, 2012.
- GONZÁLEZ GAXIOLA, O. y SANTIAGO, J. A. An alpha-Mellin transform and some of its applications. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 7(45-48): 2353-2361, 2012.
- GUÍA, M., GÓMEZ, F., y ROSALES, J. Analysis on the Time and Frequency Domain for the RC Electric Circuit of Fractional Order. *Central European Journal of Physics*, 11(10): 1366-1371, Springer, 2013.

- HILFER, R. Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: World Scientific, 2000.
- MAGIN, R. L. y OVADIA, M. Modeling the cardiac tissue electrode interface using fractional calculus. *Journal of Vibration and Control*, 14(9-10): 1431-1442, 2008.
- METZLER R. y KLAFTER, J. The Random Walk's Guide To Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. *Physics Reports*, 339(2000): 1-77, 2000.
- MONWHEA, J. The Mpemba effect: When can hot water freeze faster than cold? *American Journal of Physics*, 74(6): 514-522, 2006.
- OBEIDAT, A., GHARIBEH, M., AL-ALI, M., y ROUSAN, A. Evolution of a Current in a Resistor. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 14(2): 247-259, Springer, 2011.
- PETRAS, I. Fractional-Order Memristor-Based Chua's Circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 57(12): 975-979, 2010.
- PODLUBNY, I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 5(4): 367-386, 2002.
- PODLUBNY, I. *The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order*. Technical Report. Kosice, Slovakia: Slovak Academy of Sciences, Institute of Experimental Physics, 1994.
- ROSALES, J. J., GUÍA, M., GÓMEZ, J. F. y TKACH, V. I. Fractional Electromagnetic Wave. *Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*, 1(4): 325-335, 2012.
- TENREIRO MACHADO, J. A. A probabilistic interpretation of the fractional-order differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 6(1): 73-80, 2003.
- VELIEV, E. I. y ENGHETA, N. Fractional Curl Operator in Reflection Problems. 10th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, Ukraine, Sept. 14-17, 2004.
- WEST, B. J., BOLOGNA, M., y GRIGOLINI, P. *Physics of Fractional Operators*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- WYSS, W. The Fractional Diffusion Equations. *Journal of Mathematical Physics*, 27(11): 2782-2785, 1986.

De páginas electrónicas

- GUTIÉRREZ, R. E., ROSÁRIO, J. M., y TENREIRO MACHADO, J. T. Fractional Order Calculus: Basic Concepts and Engineering Applications. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010 Article ID. 375858, 19 pages. Hindawi Publishing Corporation. doi: 10.1155/2010/375858.
- KRISHNA, B. T. y REDDY, K. V. V. S. Active and Passive Realization of Fractance Device of Order $\frac{1}{2}$. *Active and Passive Electronic Components*, 2008(2008), Article ID 369421, 5 pages. De: <http://dx.doi.org/10.1155/2008/369421>