

## Estudio preliminar sobre las propiedades numéricas de una discretización de la ecuación hiperbólica de Burgers-Fisher

### Preliminary investigation on the numerical properties of a discretization of the hyperbolic Burgers-Fisher equation

Jorge Eduardo Macías Díaz<sup>1\*</sup>, Jonathan Batres Romo<sup>2</sup>

Macías Díaz, J. E., Batres Romo, J. Estudio preliminar sobre las propiedades numéricas de una discretización de la ecuación hiperbólica de Burgers-Fisher. *Investigación y Ciencia de la Universidad Autónoma de Aguascalientes*. Número 65: 20-25, mayo-agosto 2015.

#### RESUMEN

Se parte de una versión hiperbólica de la ecuación de Burgers-Fisher, y se proporcionará una discretización no lineal en diferencias finitas para aproximar sus soluciones. La ecuación diferencial parcial bajo estudio es un modelo con advección, reacción y amortiguamiento no lineales, para el que la existencia de soluciones de onda viajera ha sido demostrada de manera exacta sólo en algunos casos. En el presente se examinará la capacidad del método para conservar algunas de las propiedades de dichas soluciones, a saber, la positividad, la acotación y la monotonía. Los experimentos numéricos emplearán soluciones analíticas para prescribir exactamente las condiciones iniciales y de frontera. Los resultados de

**Palabras clave:** ecuación hiperbólica de Burgers-Fisher, soluciones de onda viajera, discretización no lineal, método en diferencias finitas, positividad, acotación, método monótono.

**Keywords:** hyperbolic Burgers-Fisher's equation, traveling-wave solutions, nonlinear discretization, finite-difference method, positivity, boundedness, monotone technique.

Recibido: 3 de febrero de 2014, aceptado: 17 de septiembre de 2014

<sup>1</sup> Departamento de Matemáticas y Física, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes.

<sup>2</sup> Maestría en Ciencias con Opciones a la Computación, Matemáticas Aplicadas, Centro de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma de Aguascalientes.

\* Autor para correspondencia: jemacias@correo.uaa.mx

las simulaciones sugieren que el método, además de arrojar buenas aproximaciones a las soluciones exactas, es capaz de conservar las propiedades arriba mencionadas.

#### ABSTRACT

In this work, we provide a nonlinear, finite-difference scheme to approximate the solutions of a hyperbolic generalization of the Burgers-Fisher equation from population dynamics. The model under study is a partial differential equation with nonlinear advection, reaction and damping terms, for which the existence of some traveling-wave solutions has been established in the literature. In the present manuscript, we investigate the capability of our technique to preserve some of the most important features of those solutions, namely, the positivity, the boundedness and the monotonicity. The finite-difference approach followed in this work employs the exact solutions to prescribe the initial-boundary data. In addition to providing good approximations to the analytical solutions, our simulations suggest that the method is also capable of preserving the mathematical features of interest.

#### INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la existencia de soluciones de onda viajera de ecuaciones diferenciales parciales no lineales es un tema abierto de investigación analítica

en matemáticas. En la teoría, es bien sabido que una gran cantidad de modelos no lineales (tales como las ecuaciones de Fisher, de Newell-Whitehead-Segel, de FitzHugh-Nagumo, de Burgers-Huxley) admiten este tipo de soluciones (Wang, 1988; Wang et al., 1990); sin embargo, la determinación de la expresión exacta de dichas funciones es un problema que ha producido pocos resultados en la práctica.

Muchas de las soluciones de onda viajera de los modelos mencionados arriba poseen características analíticas distintivas que las hacen física y biológicamente interesantes (Mansour, 2010). Por ejemplo, algunas de dichas soluciones son funciones positivas, acotadas, y temporal y espacialmente monótonas. En particular, la condición de positividad es biológicamente relevante en vista de que las variables de interés en dichos modelos representan tamaños o densidades de población, por lo que la asignación de valores negativos carece de significado físico (Mickens y Jordan, 2004; 2005). La condición de acotación, por su parte, surge de manera natural en sistemas biológicos donde la disponibilidad de recursos es limitada (Macías Díaz, 2011), mientras que la característica de monotonía se encuentra físicamente presente en algunos pulsos eléctricos o, biológicamente, en 'olas' de crecimiento poblacional (Macías Díaz y Villa, 2013).

En vista de las limitaciones analíticas para determinar de manera exacta las expresiones de soluciones de onda viajera de modelos no lineales, la investigación matemática de este problema se convierte en una tarea numérica en donde el diseño de herramientas computacionales confiables es el epicentro de acción. Siguiendo la pauta establecida por Ronald E. Mickens en su trabajo seminal (Mickens, 2005), la idea crucial en estos días es diseñar técnicas computacionales *dinámicamente consistentes*, es decir, metodologías que no solo posean las características numéricas tradicionales (como lo son las propiedades de consistencia, convergencia, estabilidad, etc.), sino que también reproduzcan las propiedades matemáticas inherentes a las soluciones de interés. En palabras más concretas, la intención de esta nota es proponer métodos en diferencias finitas para aproximar las soluciones de los modelos de interés, que conserven las propiedades de positividad, acotación y monotonía de las soluciones numéricas.

En este trabajo se presenta un método numérico para aproximar soluciones de una generalización

hiperbólica de la ecuación de Burgers-Fisher de dinámica poblacional. El modelo de interés posee soluciones de onda viajera, las cuales son funciones positivas, acotadas y monótonas (Wang, 1988); sin embargo, solo algunas de estas soluciones son conocidas en forma exacta. Se propondrá una discretización en diferencias finitas del modelo hiperbólico y se presentarán algunas simulaciones que sugieren que el método es capaz de conservar en la práctica las propiedades de interés de las soluciones. Desafortunadamente, la demostración de la conservación numérica de dichas propiedades es un problema para el que aún no existe demostración matemática.

## MATERIALES Y MÉTODOS

Sea  $\alpha$  un número real, sea  $\tau$  un número real positivo y sea  $u$  una función de  $(x, t)$ , donde  $x$  es un número real, y  $t$  es un real no negativo. Sea  $p$  un número real mayor o igual a 1. Suponga que  $u$  es una función doblemente diferenciable en sus dos variables, y tal que se satisface la ecuación diferencial parcial

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + [1 - \tau f'(u)] \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha u^p \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(u) = 0,$$

donde el término de reacción está dado por

$$f(u) = u(1 - u^p).$$

El modelo propuesto es una ecuación de difusión con retardo, y con términos de advección, reacción y amortiguamiento no lineales, para el que la literatura reporta solo algunas soluciones de onda viajera en forma exacta. Un ejemplo de este tipo de soluciones está dado por la función

$$u(x, t) = \left[ 1 + \exp \left( - \frac{[\alpha + \tau(p+1)]p}{(p+1)(1-c^2\tau)} (x - ct) \right) \right]^{-1/p},$$

donde  $c$  es cualquier número real positivo (Wang, 1988). Dicha solución es efectivamente una onda viajera espacial y temporalmente monótona, la cual está acotada entre 0 y 1 en todo punto  $x$  y todo instante de tiempo  $t$ .

En este trabajo se propone una discretización en diferencias finitas para aproximar las soluciones del modelo de interés. Para ello, se fija un dominio

espacial acotado  $[a, b]$  en el sistema de los números reales, y se considera un intervalo de tiempo finito, de longitud igual a un número real positivo  $T$ . Sean

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

y

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$$

particiones uniformes de  $[a,b]$  y  $[0, T]$ , respectivamente. Se emplearán las notaciones  $\Delta x$  y  $\Delta t$  para representar las normas de las particiones espacial y temporal, respectivamente. Más aún, la nomenclatura  $u_n^k$  representará una aproximación al valor exacto de la solución  $u$  en el punto  $(x,t)$ . Bajo estas premisas, la técnica en diferencias finitas propuesta en este trabajo para aproximar la ecuación diferencial parcial hiperbólica de interés está dada por las siguientes ecuaciones discretas:

$$\tau \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{(\Delta t)^2} + \left[ 1 - \tau \frac{f(u_n^{k+1}) - f(u_n^{k-1})}{u_n^{k+1} - u_n^{k-1}} \right] \frac{u_n^{k+1} - u_n^{k-1}}{2\Delta t} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{(\Delta x)^2} - \alpha(u_n^k)^p \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2\Delta x} - \frac{f(u_n^{k+1}) + f(u_n^{k-1})}{2} = 0,$$

válidas para todo  $0 < n < N$  y todo  $1 < k < K$ .

Es claro que todas las derivadas parciales en el modelo de interés son aproximadas por diferencias finitas de segundo orden en el espacio y/o en el tiempo. De la misma forma, la derivada de  $f$  es estimada por su aproximación de segundo orden con respecto a  $u$ . Mientras tanto, el valor de la función  $f$  al tiempo  $k$  y en el  $n$ -ésimo punto de la partición espacial es aproximado por el respectivo promedio de los tiempos  $k+1$  y  $k-1$ .

Después de algunos ajustes algebraicos, es posible verificar que la aproximación de la solución en el  $n$ -ésimo punto y el instante de tiempo  $k+1$  es una raíz de la función

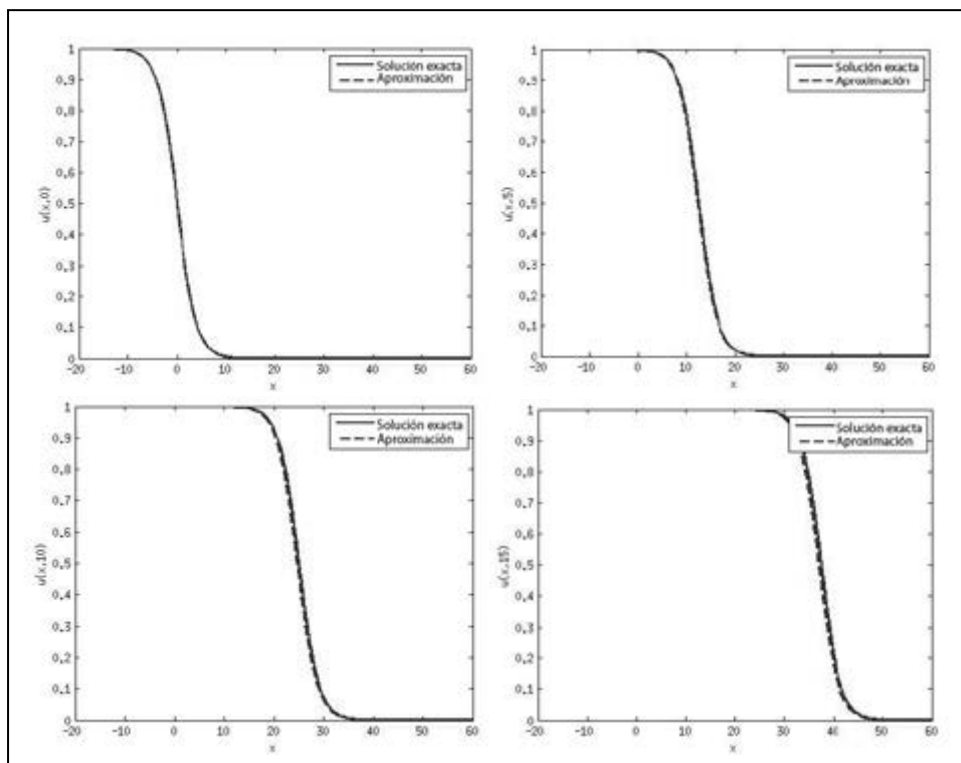
$$F_{c_n^k}(u) = \left( \tau + \frac{\Delta t}{2} \right) u - \frac{\Delta t}{2} (\tau + \Delta t) f(u) - c_n^k,$$

donde

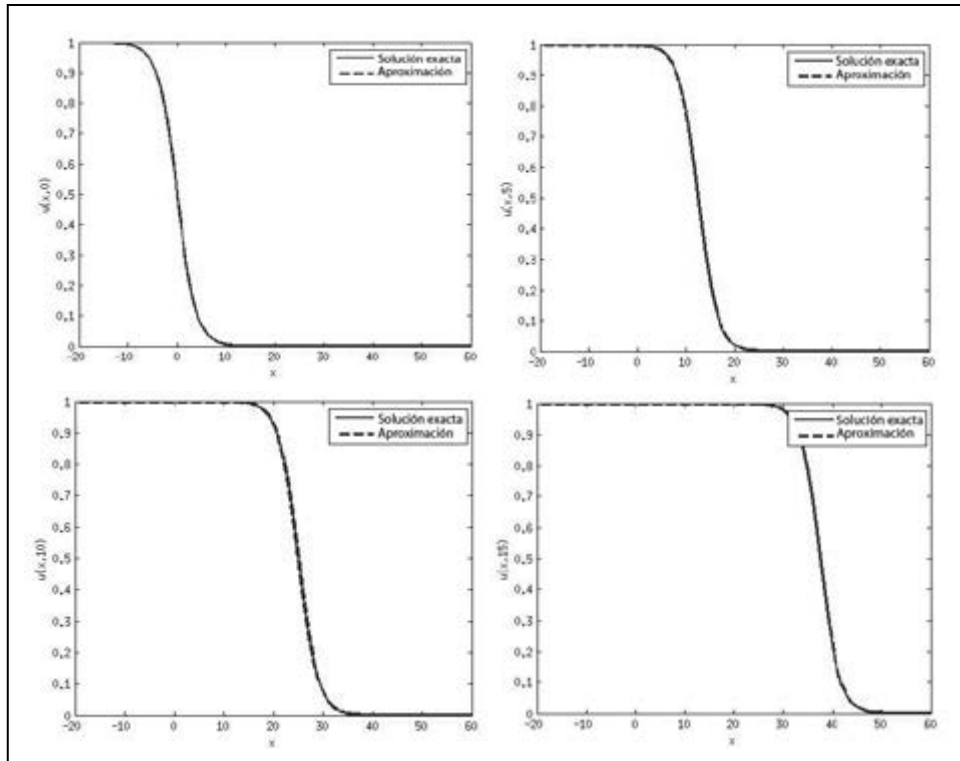
$$c_n^k = (R^2 + \alpha(u_n^k)^p)u_{n+1}^k + 2(\tau - R^2)u_n^k + (R^2 - \alpha(u_n^k)^p)u_{n-1}^k + \left( \frac{\Delta t}{2} - \tau \right) u_n^{k-1} - \frac{\Delta t}{2} (\tau - \Delta t) f(u_n^{k-1}).$$

Aquí,

$$R^2 = \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2$$



**Figura 1.** Resultados de las simulaciones descritas en el Ejemplo 1 en cuatro instantes de tiempo distintos, con  $\Delta t = 0.001$ . Las soluciones exactas se ilustran en líneas continuas, mientras que las aproximaciones numéricas aparecen como líneas quebradas.



**Figura 2.** Resultados de las simulaciones descritas en el Ejemplo 1 en cuatro instantes de tiempo distintos, con  $\Delta t = 0.00025$ . Las soluciones exactas se ilustran en líneas continuas, mientras que las aproximaciones numéricas aparecen como líneas quebradas.

Y

$$r = \frac{(\Delta t)^2}{2\Delta x}$$

Es importante hacer notar que esta técnica numérica generaliza al caso hiperbólico algunas discretizaciones de ecuaciones difusivas reportadas en la literatura (Macías Díaz, 2011; Macías Díaz y Villa, 2013), las cuales son capaces de preservar las propiedades matemáticas de interés en esta nota; por esta razón, es de esperarse que la técnica propuesta también sea capaz de mantener dicha consistencia dinámica. A diferencia de dichos métodos, el esquema propuesto en el presente trabajo es un método de tres pasos, consistente con la naturaleza hiperbólica del modelo de interés. Adicionalmente, la realización computacional de esta técnica requiere el conocimiento de las primeras aproximaciones iniciales a la solución, así como condiciones de frontera de Neumann, y el uso del método de Newton para aproximar raíces reales de funciones de una variable. En los siguientes ejemplos ilustrativos, la información inicial y de frontera será proporcionada usando la solución analítica en los instantes iniciales y en los puntos de la frontera.

## RESULTADOS

### Ejemplo 1

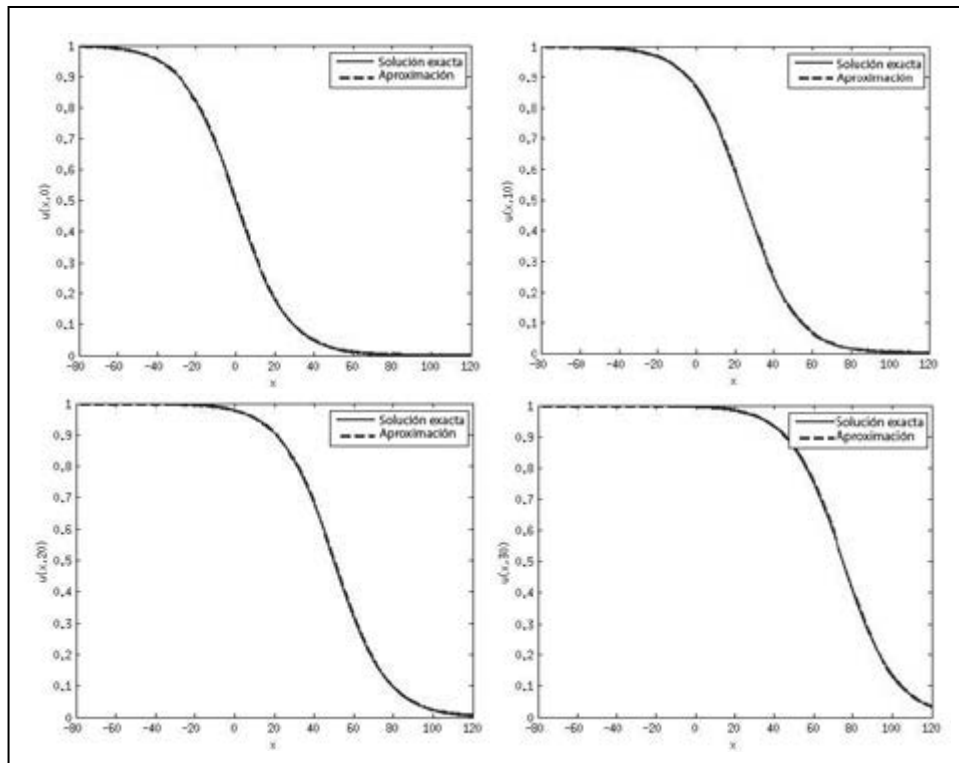
Fíjese el intervalo espacial  $[-20, 60]$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\tau = 0.005$ ,  $p = 1$  y  $c = 2.5$ . Computacionalmente, tómense tamaños de paso espacial y temporal iguales a 0.5 y 0.001, respectivamente. La Figura 1 muestra la solución exacta y la solución numérica respectiva, para cuatro instantes de tiempo. Mientras tanto, la Figura 2 muestra resultados numéricos análogos cuando el tamaño de paso espacial es igual a 0.0025.

### Ejemplo 2

Considere el mismo problema de la Figura 2, con  $\tau = 0.8$ . La Figura 3 presenta el resultado de simular las soluciones del problema hiperbólico de interés, en cuatro instantes de tiempo.

## DISCUSIÓN

Obsérvese en primera instancia que la Figura 1 contrasta la solución exacta con la solución numérica respectiva, para cuatro instantes de tiempo. Los resultados muestran una buena concordancia entre los



**Figura 3.** Resultados de las simulaciones descritas en el Ejemplo 2 en cuatro instantes de tiempo distintos. Las soluciones exactas se ilustran en líneas continuas, mientras que las aproximaciones numéricas aparecen como líneas quebradas.

resultados analíticos y las aproximaciones numéricas. Más aún, los resultados resumen el hecho de que las propiedades de positividad, acotación y monotonía son conservadas en cada instante de paso. La Figura 2 muestra resultados numéricos análogos cuando se toma una partición temporal más fina; es decir, cuando el tamaño de paso espacial es igual a 0.0025. De nueva cuenta, los resultados reflejan la conservación de las propiedades de positividad, acotación y monotonía de las aproximaciones. En este caso, sin embargo, las aproximaciones a las soluciones analíticas son aún mejores que en la Figura 1.

En la Figura 3 el parámetro de retardo  $\tau$  es relativamente más grande que en el Ejemplo 1. Sin embargo, las simulaciones muestran aproximaciones que son positivas, acotadas y monótonas en todo instante de tiempo. De igual manera, se ha encontrado una buena concordancia entre las estimaciones numéricas y las soluciones analíticas. Asimismo, las propiedades matemáticas relevantes de las soluciones de interés se siguen conservando en este caso.

Es menester mencionar que se han obtenido más comparaciones numéricas entre las soluciones

exactas y las aproximaciones numéricas calculadas con el método propuesto. Los resultados indican que el método propuesto conserva las propiedades analíticas de interés para valores de los parámetros computacionales suficientemente pequeños. En particular, los resultados obtenidos para ecuaciones diferenciales parciales sin retardo concuerdan con los resultados obtenidos previamente por el primer autor en un trabajo previo (Macías Díaz, 2011). El caso con retardo es un reto analíticamente abierto.

Finalmente, es importante mencionar que la investigación analítica y numérica de la existencia de soluciones de onda viajera es un problema de interés pragmático en varias áreas de la ciencia. Por ejemplo, en la investigación del crecimiento poblacional es importante determinar el avance de mutaciones genéticas que pueden ser benéficas a una población. Tal como Fisher lo demostró en sus estudios sobre mutaciones genéticas, muchas veces estos efectos tienden a propagarse en formas de ondas que avanzan a velocidades constantes. Asimismo, en termodinámica, la propagación de calor en un medio suele propagarse en forma de frentes de ondas. Tal es el caso, por ejemplo, de la propagación de incendios forestales.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto un esquema de diferencias finitas para aproximar las soluciones de una generalización hiperbólica de la ecuación de Burgers-Fisher. El modelo de interés posee soluciones de onda viajera que son positivas, acotadas y monótonas, tanto espacial como temporalmente. Sin embargo, pocas de estas soluciones son conocidas de manera analítica, de donde surge la necesidad de poseer técnicas numéricas confiables en la investigación de dichas soluciones.

Motivados por esta necesidad, el presente trabajo propone una metodología novedosa para aproximar dichas soluciones. El método propuesto es no lineal y de tres pasos, consistente con la naturaleza no lineal e hiperbólica del modelo bajo estudio. El método fue implementado computacionalmente con el fin de evaluar su capacidad de conservar las propiedades matemáticas de las soluciones de onda viajera de interés, a saber, positividad, acotación, y

monotonía espacial y temporal. Los resultados de las simulaciones computacionales arrojaron evidencia preliminar afirmativa sobre la conservación de estas características matemáticas.

Desafortunadamente, la demostración formal de la conservación de la positividad, la acotación y la monotonía de las soluciones bajo estudio, es un problema abierto hasta el momento. Evidentemente, la elucidación de condiciones paramétricas bajo las cuales la metodología propuesta (o una variación conveniente de la misma) sea capaz de mostrar esta consistencia dinámica, es también un problema que aún queda sin resolver. Las simulaciones indican que la técnica reportada en este manuscrito es estable, convergente, y dinámicamente consistente con las propiedades de interés. Los hallazgos preliminares reportados en esta nota son el inicio de la investigación de discretizaciones para modelos hiperbólicos, que posean múltiples propiedades de consistencia analítica y numérica.

## LITERATURA CITADA

- MACÍAS DÍAZ, J. E. Sufficient conditions for the preservation of the boundedness in a numerical method for a physical model with transport memory and nonlinear damping. *Computer Physics Communications*, 182(12): 2471-2478, 2011.
- MACÍAS DÍAZ, J. E. y VILLA, J. Simple numerical method to study traveling-wave solutions of a diffusive problem with nonlinear advection and reaction. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 29(5): 1694-1708, 2013.
- MANSOUR, M. B. A. Traveling wave solutions for the extended Fisher/KPP equation. *Reports on Mathematical Physics*, 66(3): 375-383, 2010.
- MICKENS, R. E. Dynamic consistency: a fundamental principle for constructing nonstandard finite difference schemes for differential equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, 11(7): 645-653, 2005.
- MICKENS, R. E. y JORDAN, P. M. A new positivity-preserving nonstandard finite difference scheme for the DWE. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 21(5): 976-985, 2005.
- MICKENS, R. E. y JORDAN, P. M. A positivity-preserving nonstandard finite difference scheme for the damped wave equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 20(5): 639-649, 2004.
- WANG, X. L. et al. Solitary wave solutions of the generalized Burgers-Huxley equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23(3): 271, 1990.
- WANG, X. Y. Exact and explicit solitary wave solutions for the generalized Fisher equation. *Physics Letters A*, 131(4-5): 277-279, 1988.